Physik der Musikinstrumente

1 Einführung

Ein lehrreiches Thema ist die "Physik der Musikinstrumente". Thematisch gehört dieses Gebiet zur Mechanik, insbesondere zur Akustik. Der Wellenlehre kommt im Kontext eine grosse Bedeutung zu. Ohne Mathematik geht es nicht. Erst mit dem Aufkommen der Infinitesimal-rechnung wurden die mit den Musikinstrumenten verbundenen Problematiken mathematisch beherrschbar. Der erste ernstzunehmende Anstoss kam von Brook Taylor (1685-1731). Er erkannte, dass die Grundschwingung einer Seite durch eine Sinusfunktion beschrieben werden kann. D'Alembert, Euler und D. Bernoulli steuerten das ihrige zur Schwingungs- und Wellenlehre bei.

Dem Instrumentenbauer geläufig ist die alte Taylorsche Formel, die vom isochronen Pendel abgeleitet wurde:

$$f = \frac{1}{2} l \cdot \sqrt{\frac{F}{\mathcal{M}}}$$

$\mathcal{M}$ Masse pro Längeneinheit := ρ · A

Damit lässt sich die Frequenz des Grundtons einer Saite berechnen. Der Saitenton ist um so tiefer, je länger die Saite, je kleiner die Zugspannung und je grösser die Saitenmasse ist. Tiefe Töne erfordern daher grosse Saitenmassen (was durch Umspinnen mit dünnem Kupfer- oder Silberdraht erreicht wird). Der Instrumentenbauer muss allerdings weitere Einflussgrössen berücksichtigen wie Zugfestigkeit, Dichte, Dehnung, Bruchdehnung, E-Modul und Härte einer Saite.

Die Bewegungsgleichung der eindimensionalen harmonischen Schwingung lautet:

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Real muss die Dämpfung berücksichtigt werden, so dass gilt:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0$$

Modellbeispiele solcher Systeme sind:

- Masse-Feder-Pendel
- Helmholtz-Resonator

Als schwingende Systeme kommen instrumental in Betracht:

- Saiten → Geige, Gitarre, Klavier, Harfe
- Blätter → Oboe, Klarinette, Saxophon
- Membranen → Trommel, Pauke, Bongo
- Platten, Stäbe → Xylophon, Vibraphon, Triangel
- Schalen → Becken, Tam-Tam, Glocke, Gong
- Resonatoren → Orgelpfeife, Geigenkasten, Gitarrenkörper, Klavierkorpus

- Wellenleiter → Blasinstrumente (Flöte, Trompete, Horn etc.)

Löst sich die Schwingung vom erzeugenden System, entsteht in der Luft eine longitudinale Raumwelle. Bei sphärisch-symmetrischer Quelle treten zudem Kugelwellen in Erscheinung.

Nach d'Alembert gilt für eine Welle:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Ein weiterer Fortschritt setzte mit Fourier bzw. dessen Traktat "La Théorie Analytique de la Chaleur" ein, wo gezeigt wurde, dass eine Schwingung in verschiedene Teilschwingungen unterschiedlicher Stärke zerlegt werden kann. Entwickelt hatte Fourier sein Werkzeug für die Untersuchung von Temperaturschwankungen. Dies erwies sich wegweisend auch für die Akustik, so dass die von Mersenne und Sauveur phänomenologisch untersuchten Tonspektren nun auch mathematisch beschrieben werden konnten. Nicht lange danach erweiterten Ohm und Helmholtz das Wissen um die Obertöne. Insbesondere Ohm (1863) vermochte zu zeigen, dass das Gehör wie ein Fourieranalysator arbeitet. Helmholtz dagegen analysierte Klänge, indem er das Phänomen der Resonanz bemühte.

1.1 Saiten und Stäbe

Beginnen wir bei Saiten und dünnen Stäben, wo nach dem Hooke'schen Gesetz eine Rückstellkraft zu verzeichnen ist:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\partial w}{\partial x}$$

Je nach Befestigung des Stabes (ein- oder zweiseitig) sind viele Schwingungsmoden möglich. Reine Sinusschwingungen sind die Ausnahme, weil eine Saite auch Oberschwingungen erzeugt; doch das wusste Brook Taylor noch nicht. Bei der Gitarre sind es zur Hauptsache transversale Schwingungen der Saiten. Bei Stäben kommen auch Torsionsschwingungenn vor. Beim Klavier werden die Saiten durch eine Hammermechanik angestossen. Die Hämmer bestehen aus einem Hartholzkern mit Filzüberzug. Der charakteristische Klang entsteht durch das Zusammenwirken von Saiten, Steg und Resonanzboden. Nebst dem Anschlag ist auch das Abklingverhalten von Bedeutung; dabei überlagern sich horizontale und vertikale Saitenschwingungen. Bei der Geige ist der Einfluss des Bogendrucks auf die Saite zu beachten. Stets ist auch ein Einschwingvorgang vorhanden. Tonquellen mit Schallwand (Geige) sind auch bei niedrigen Frequenzen effizient. Zur mathematischen Behandlung wird das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral bemüht.

1.2 Membrane, Platten und Schalen

Bei Membranen, Platten und Schalen müssen wir wegen der schwingenden Fläche die Wellengleichung zweidimensional entwickeln. Die ideale Membran ist als zweidimensionale Erweiterung der idealen Seite zu verstehen. Es ist zwischen Rechteck- und Kreismembran zu unterscheiden. Zur Beschreibung dünner Kreisplatten erweisen sich Besselfunktionen (Abb. 1-1) als nützlich. Die Eigenfrequenz einer runden Membran ist durch die zugehörige Nullstelle einer Besselfunktion n-ter Ordnung bestimmt.

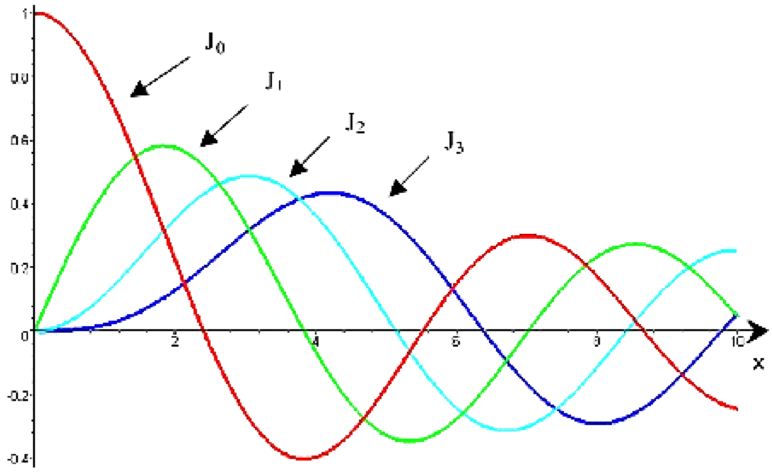


Abb. 1-1
Besselfunktionen 1. Gattung, n-ter Ordnung

Bessel-Funktionen (Zylinderfunktionen) spielen eine wichtige Rolle in der Physik. Man trifft sie u.a. bei der Untersuchung von Eigenschwingungen von zylindrischen Resonatoren, der Analyse des Frequenzspektrums von frequenzmodulierten Signalen (FM) und dem Sättigungsverhalten von Klystrons (Radartechnik, Beschleunigerphysik).

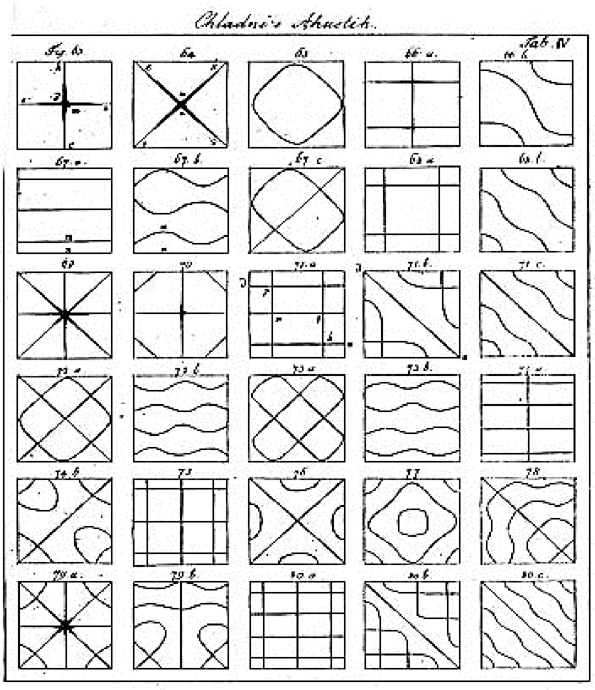


Abb. 1-2
Chladnische Klangfiguren

Zahlreich ist auch das Modenspektrum quadratischer Platten wie die Chladnischen Klangfiguren belegen. In dünnen Platten manifestieren sich Longitudinal- und Transversalwellen ohne signifikante Abstrahlung. Hingegen treten stark dispersive Biegewellen mit signifikanter Abstrahlung auf. Die Frequenz der Normalmoden hängt von den Randbedingungen ab. Nebst der Erzeugung von Harmonischen sind auch Subharmonische zu beobachten. Selbst chaotisches Verhalten kommt vor.

Auf die Platte gestreuter Sand wandert zu den Knotenpunkten der Wellenfläche, so dass sich die zum jeweiligen Klangbild charakteristische Figur einstellt.

1.3 Zylinderrohre und Hörner

Als Wellenleiter – insbesondere bei Blasinstrumenten – dienen lange Zylinderrohre und Hörner; es ist zwischen konischen und hyperbolischen Bohrungen zu unterscheiden. Exponential- und Besselhorn seien hier exemplarisch erwähnt. Die ideale Bohrung für die Klarinette ist eine über die gesamte Länge verlaufende zylindrische Bohrung. Wegen ihrer drei Register[1] unter-

[1] Eine Klarinette besitzt drei Register: Chalumeau-Register (tief), Clarin-Register (mittel) und hohes Register.

scheidet sich die Klangfarbe über mehrere Oktaven beachtlich (in der tiefen Lage sind die ungeradzahligen Obertöne lauter, in der hohen Lage die geradzahligen). Oboe, Saxophon und Fagott besitzen hingegen konische Bohrungen.

Stehende Wellen entstehen im Rohr als Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen. Die rücklaufende Welle entsteht durch Reflexion. Bedingung dafür ist ein Übergang mit unterschiedlicher Impedanz. In Pfeifen haben wir es immer mit stehenden Wellen zu tun.

- Für offene Pfeifen gilt: $f = c/2l$
- Für geschlossene dagegen: $f = c/4l$

Bei der Trompete wird die Länge der schwingenden Luftsäule über Ventile gesteuert. Massgebend für den Klang ist auch die Mensur. Mundstück, Lippentechnik und allenfalls ein Dämpfer beeinflussen Klang und Tonqualität.

Résume: Diese Kurzeinführung in die "Physik der Musikinstrumente" zeigt bereits deutlich, dass ohne höhere Mathematik kein tieferes Verständnis der zugrunde liegenden Phänomene möglich ist. Die Mathematik erweist sich in dieser Sache als treue Schwester der Physik. Hinzu kommt das einschlägige Experiment, wie es dem Studenten bspw. aus dem Physikalischen Praktikum bekannt ist.

2 Geräusch, Ton, Klang und Harmonie

2.1 Der reine Ton

a) Ein reiner Ton ist eine Sinusschwingung. Es ist auch von einer harmonischen Schwingung die Rede. Der für ein bestimmtes Instrument charakteristische Klang besteht aus einer Superposition mehrerer sinusförmiger Schwingungen zu einer nicht sinusförmigen, d.h. enharmonischen Schwingung. Der Grundton bestimmt die Tonhöhe, die Obertöne die Klangfarbe.

b) Ein Geräusch, z.B. das Rascheln von Papier, ist ein stochastisches Schwingungsphänomen, ein Gemisch vieler Frequenzen von etwa derselben Intensität (vergleichbar mit dem "weissen Rauschen").

c) Ein Knall, z.B. beim Platzen eines Luftballons, ist ein kurzzeitiger und starker Schalleindruck. Für den Experimentalphysiker ist es ein sog. Diracstoss.

2.2 Tonleitern

Im Abendland existieren grundsätzlich zwei Tonleitern.

2.2.1 Die diatonische Tonleiter

Die Diatonische Tonleiter umfasst folgende Intervalle:

Prime, Sekunde, Terz, Quarte, Quinte, Sexte, Septime und Oktave. Letztere bedeutet eine Frequenzverdopplung. Je zwei benachbarte Töne (Intervall) stehen in einem bestimmten Frequenzverhältnis, bezogen auf den Grundton:

c = 1; d = 9/8; e = 5/4; f = 4/3; g = 3/2; a = 5/3; h = 15/8; c' = 2/1

Einer hat einmal gesagt: Musik ist Mathematik. In obigem Sinne stimmt dies auch.

2.2.2 Die chromatische Tonleiter

Die chromatische Tonleiter besitzt – zusätzlich zu den bereits genannten Tönen – die Halbtöne cis (des), dis (es), fis (ges), gis (as), ais (b). Dadurch lassen sich insgesamt zwölf Tonarten auf den Grundtönen errichten.

2.2.3 Die temperierte Stimmung

Für Instrumente mit fester Stimmung (nichttransponierende Instrumente wie das Klavier) ist die chromatische Tonleiter mit ihrer reinen Stimmung nicht brauchbar. Anstatt dessen wird die gleichmässig temperierte Tonleiter verwendet mit welcher sich insbesondere Joh. Sebastian Bach (1685-1750) auseinandergesetzt hat. Jedes der aufeinander folgenden 12 Halbtonintervalle besitzt hier das gleiche Frequenzverhältnis von $\sqrt{2}^{1/12} = 1.059463...$

Als Kammerton gilt das eingestrichene a' (f = 440 Hz). Mit diesem "wohltemperierten Klavier" erst ist es möglich, auf jedem der 12 Töne einer Oktave sowohl eine Dur- wie auch eine Molltonleiter aufzubauen.

Letztlich erhalten wir den Quintenzirkel, an welchem sich Klavier, Solostimme und Orchester orientieren.

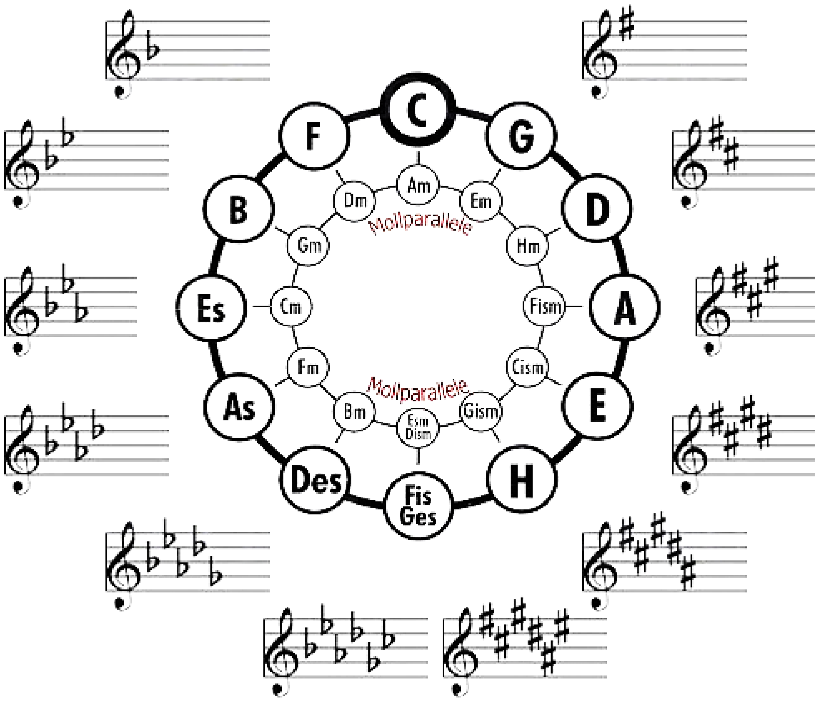


Abb. 2-1
Quintenzirkel (mit Dur- und Moll-Tonarten)

Anm.: Jede der zwölf Tonarten ist durch eine Quinte von der benachbarten entfernt. Diese Verwendung der Tonarten sowie die dazu notwendige temperierte Stimmung sind schöpferische Leistungen der abendländischen Kultur, die es in anderen Kulturen in dieser Form nicht gibt. Ohne temperierte Stimmung - bei Verwendung reiner Quinten - entstünde eine Quintenspirale. Erst die wohltemperierte Stimmung ermöglicht die "enharmonische Verwechslung" und somit einen geschlossenen Zirkel.

Ein Klarinettist, der auf seinem Instrument in Cis-Dur (Des) spielt, benötigt wegen der vielen zu betätigenden Klappen einige Fingerfertigkeit. Benutzt er bspw. eine in B gestimmte Klarinette, muss ihn das Klavier auf H-Dur begleiten. Benutzt er eine A-Klarinette, spielt der Pianist in B-Dur. Oft verwendet der gewiefte Jazzklarinettist deshalb zwei unterschiedlich gestimmte Klarinetten, um so bei schwierigen Stücken die für ihn günstigste Stimmlage greifen zu können. Jedenfalls habe ich diese Praxis bereits als Junge übernommen, wenn der "Alte" seiner Klavierhandorgel nie gehörte Klänge entlockte und ich ihn dazu auf der Klarinette begleiten durfte... Als wir "The Sheik of Araby" oder "Honeysuckle Rose" und andere griffige Stücke wie bspw. "Auf Wiedersehn" mit beschwingtem Foxtrott-Einschlag spielten. Harmonisch empfundene Tonartenwechsel erfolgen oft im Gegenuhrzeigersinn; aber auch das Umgekehrte ist natürlich möglich. So wechselten wir bspw. von F-Dur nach B-Dur und danach erneut zurück nach F-Dur. Im alten Jazz gibt es viele Varianten; deshalb höre ich zwischendurch gerne Klarinettenvirtuosen wie Johnny Dodds (1892-1940), Jimmie Noone (1895-1944), George Lewis (1900-1968) oder Barney Bigard (1906-1980) zu, während ihre unvergessliche Musik aus alten Schellackplatten erklingt.

2.3 Dur und Moll

Von der Stimmlage und Empfindung her gibt es zwei grundsätzliche Tonartspektren. Bei einer Dur-Tonart liegen die Halbtonintervalle zwischen dem 3. und 4. bzw. 7. und 8. Ton, bei einer Moll-Tonart zwischen dem 2. und 3. bzw. 5. und 6. Ton. Moll erzeugt eine eher gedrückte, zuweilen sogar düstere Stimmung (lausche Schuberts Unvollendeter – eine Sinfonie in h-Moll). Zigeuner spielen virtuos in ihrem eigenen Moll. Am Schönsten für mich sind die gemischten Chöre aus der freikirchlichen Bewegung. In der Schweiz gab's früher etliche solcher Gemischtenchöre, inzwischen sind es nur noch wenige.. Beim Klang dieser Heilslieder rinnen dem Schreibenden ab und zu und aus tiefster Seele dicke Tränen über die Wangen, weil ihm erneut bewusst wird, was der Herr Jesus am Kreuze für uns tat. Der Klang, die Harmonie und die Worte geben den Auschlag. Wenn dereinst selbst ich Geringer im höhern Chor steh', bekleidet mit weissem Gewand und einem Palmblatt in der Hand – wird dies nicht eine unaussprechliche Freude sein? Doch, gewiss: ein Überwinder will ich deshalb sein.

2.4 Harmonie

Nichts ist dem natürlichen Empfinden des Abendländers mehr verhasst, als dissonante Intervalle. Wohlklingende, d.h. konsonante Intervalle sind z.B. Terz und Quinte. Das gleichzeitige Erklingen einzelner Töne, die harmonisch empfunden werden, wird als Akkord bezeichnet. Gewisse Akkorde, wie z.B. ein C-Dur-Akkord, wirken hell und freundlich. Moll-Akkorde sind dagegen eher trübe und traurig. Andere, wie der Septimenakkord, besitzen eine intensive Klangfarbe. Der verminderte Septimenakkord birgt eine Spannung in sich, die der baldigen Auflösung harrt. Dramatisch wirken Nonenakkorde auf mein Gemüte ein. Harmonielehre ist gewiss eine kunstvolle Disziplin; doch niemand weiss, weshalb wir so empfinden.

3 Versuch, die Physiologie des Ohres zu verstehen

Nach dem kurzen Abstecher in die Musiktheorie und Harmonielehre nun zum menschlichen Gehör. Dieses wird im erweiterten Kontext in die "Physik der Musikinstrumente" einbezogen; denn was nützt das schönste Instrumentenspiel, wenn es niemand hört?

3.1 Das menschliche Gehör

Das Gehör des Menschen ist ein Kunstgebilde sondergleichen und zudem ein Organ von erstaunlicher Leistungsfähigkeit bezüglich der Wandlung mechanischer Schwingungen in elektrische Signale. Es nimmt Schallintensitäten von von 1e-12 bis 2 W/qm in einem Frequenzbereich von etwa 16 Hz bis 20 kHz wahr (sofern es gesund und nicht altersbedingt abgenutzt ist).

Die Auflösung ist beachtlich. Das menschliche Ohr ist im Stande, Frequenzunterschiede von nur 3 Hz zu detektieren. Der kleinste noch hörbare Schallwechseldruck von 2e-5 Pa erzeugt eine Elongation des Trommelfells von gerade nur 1e-10 m (das entspricht dem Durchmesser eines Atoms).

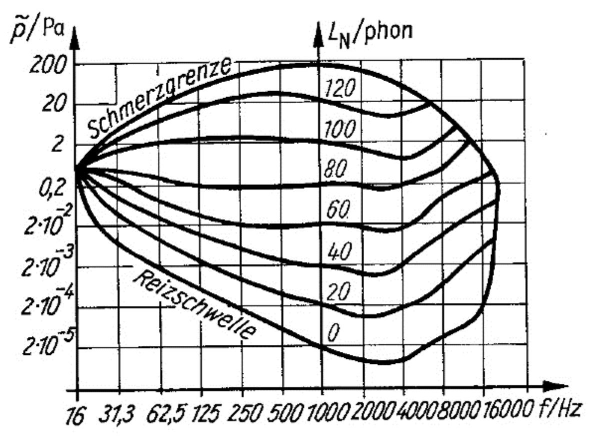
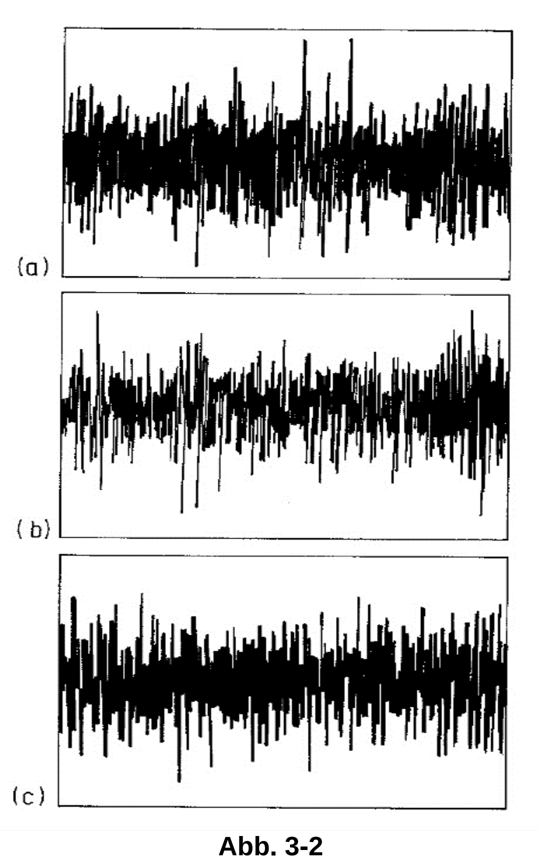


Abb. 3-1
Hörflächen-Diagramm (zwischen Reizschwelle und Schmerzgrenze)[2]

Erstaunlich ist auch die Fähigkeit der Klang- und Spektralanalyse (wobei die Weiterverarbeitung der Signalspektren im Gehirn stattfindet) wie an den nachfolgenden Lautstärke-Zeit-Diagrammen (Abb. 3-2) ersichtlich ist.



a) Mendelssohns Violinkonzert

b) Stimmen eines Orchesters (Kakophonie)

c) Geräusche des Publikums während der Pause

Abb. 3-2
Lautstärke-Zeit-Diagramme[3]

[2] Kuchling: Taschenbuch der Physik.
[3] Bergmann, Schaefer: Experimentalphysik (Bd. 1).

Der Hör-Gehirn-Apparat vermag diese völlig verschiedenen Informationsgehalte tadellos zu unterscheiden, was selbst für einen entsprechend propgrammierten Spektrumanalyzer ein schwieriges Unterfangen bliebe. Inzwischen wissen wir zwar erheblich mehr darüber, trotzdem ist es erstaunlich!

Pohl vermerkt denn auch folgerichtig zum Spektralapparat des menschlichen Innenohres:

> Was er leistet, ist physikalisch nur als eine "Vorzerlegung" zu bezeichnen. Das tatsächlich vorhandene grosse Auflösungsvermögen ist physikalisch nicht zu verstehen. Wie beim Auge stossen wir auch beim Ohr auf eine entscheidende Mitwirkung zentraler, also im Gehirn ablaufender Vorgänge. Sie entziehen sich einstweilen noch unserem Verständnis...

3.2 Anatomie des Ohres

Organisch ist das Gehör unterteilt in Aussenohr, Mittelohr und Innenohr.

3.2.1 Das Aussenohr

Durch den aussen befindlichen Gehörgang gelangt der Schall zum Trommelfell, einer Membran, welche auf die im Mittelohr vorhandenen Gehörknöchelchen einwirkt. Diese bestehen aus drei Gliedern: dem Hammer, der unmittelbar vom Trommelfell zum Schwingen angestossen wird und diese Oszillationen über Amboss und Steigbügel auf eine kleinere Membran – das ovale Fenster der Hörschnecke – überträgt. Rein mechanisch gesehen bereits ein subtiles Wunderwerk. Auch über die Schädelknochen erfolgt Schallausbreitung (setze eine schwingende Stimmgabel an die Stirn und du hörst den Ton intensiver).

Der eigentliche Schallwandler – die *Cochlea* – befindet sich eingebettet im Felsenbein des Innenohrs, ummantelt von einem äusserst harten Knochenmaterial. Dieses an ein Schneckengehäuse erinnernde Kunstwerk ist mit dem aus drei Bogengängen aufgebauten Gleichgewichtsorgan zu einer organischen Einheit verbunden und mit Flüssigkeit (Lymphe) gefüllt. Nebst dem ovalen Fenster – an welches der Steigbügel ansetzt – besitzt die Hörschnecke ein zweites rundes Fenster, das dem Druckausgleich dient.

3.2.3 Das Innenohr

Betrachten wir nun das Innenohr (Auris interna) im Detail – insgesamt ein hochkomplexes Organum; dessen Erfinder muss in der Tat ein genialer Konstrukteur gewesen sein. Unterteilt in zwei Kammern oder Gänge wird die Hörschnecke (Cochlea) entlang ihrer gewendelten Längsrichtung durch die Basilarmembran (Membrana basilaris), die – in der Breite sukzessive anwachsend – ins Schneckenloch (Helicotrema) einmündet.

Die mit Perilymphe angefüllten Kammern werden als *Scala tympani* (Paukentreppe) und *Scala vestibuli* (Vorhoftreppe) bezeichnet und sind miteinander an der Schneckenspitze (Apex) über das Schneckenloch verbunden (Abb. 3-3).

Eine dritte mit (kaliumreicher) Endolymphe gefüllte Kammer, die *Scala media* – auch *Ductus cochlearis* genannt –, ist durch die Reissner-Membran von der *Scala vestibuli* und durch die Basilarmembran von der *Scala tympani* getrennt und liegt zwischen den beiden anderen Gängen in der Hörschnecke (Abb. 3-4; Abb. 3-5).

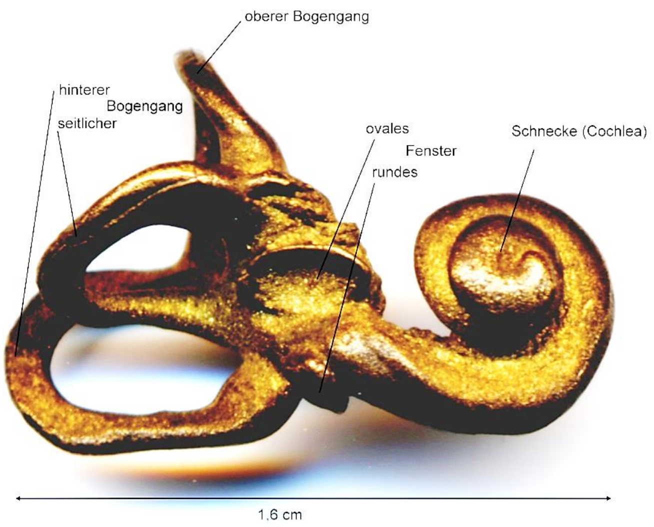


Abb. 3-3
Ausguss eines menschlichen Labyrinths[4]

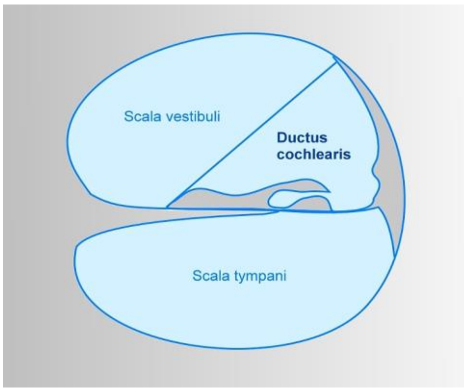


Abb. 3-4
Ductus cochlearis (Schneckengang) oder auch Scala media (mittlere Treppe).[5]

Der Ductus cochlearis beinhaltet das Corti-Organ mit den Haarzellen und der Membrana tectoria, einer dünnen Membran, die über dem Corti-Organ liegt und außerhalb der äußeren Haarzellen frei endet.

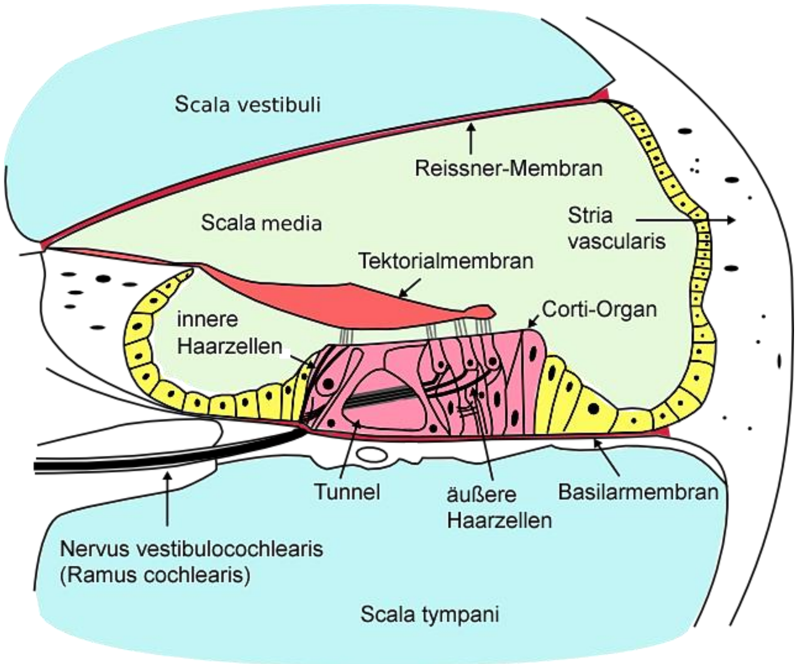


Abb. 3-5
Cochlea (schematisch)[6]

[4] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/63/Ear_labyrinth.jpg
[5] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d2/Ductus_cochlearis_schema.jpg
[6] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/58/Cochlea-crosssection-de.png

Zusammenfassend:

Die Basis der Hörschnecke grenzt an das Mittelohr mit den Gehörknöchelchen. Die Fußplatte des Steigbügels ist in das ovale Fenster (Fenestra vestibuli oder Fenestra ovalis) beweglich eingepasst. Hinter dem ovalen Fenster liegt die *Scala vestibuli*. Diese ist an der Spitze der Schnecke über das Schneckenloch mit der *Scala tympani* verbunden. Letztere grenzt an der Basis an das runde Fenster (Fenestra cochleae). Über das runde Fenster kann der durch die Oszillationen ausgeübte Druck ausgeglichen werden. Wird nun das ovale Fenster durch den Steigbügel in Schwingungen versetzt, so läuft eine Wanderwelle durch die *Scala vestibuli* in Richtung Schneckenspitze; dies führt zur Auslenkung der Basilarmembran, wodurch der ausgeübte Flüssigkeitsdruck auf die *Scala tympani* und schliesslich über die Tektorialmembran durch Scherung auf die äusseren Haarzellen des Cortischen Organs (Organon spirale) übertragen wird. Das Cortische Organ ist mit insgesamt vier Reihen feiner Haarzellen besetzt und sitzt auf der Basilarmembran. Die äusseren drei Reihen dienen der Verstärkung der mechanischen Schwingungen innerhalb der Cochlea (Verstärkungsfaktor V = 1'000). Die innere Reihe bewirkt die Umwandlung der Oszillationen in Nervenimpulse (sog. mechano-elektrische Transduktion), welche über den Hörnerv als neuronale Impulsmuster ins Gehirn gelangen.

4 Zur Physik des Ohrs

4.1 Einfaches Ohrmodell

Es lässt sich im Modellversuch belegen, dass das Amplitudenmaximum der sich entlang der Basilarmembran ausbreitenden Wellengruppen eindeutig von der Frequenz abhängig ist. Jede Schallfrequenz besitzt ihren Ort auf der Basilarmembran. Diese wirkt also in gewisser Weise wie ein mit einem Zungenfrequenzmeter vergleichbarer Spektralapparat (was bereits von Ohm vermutet wurde); nur eben wesentlich umfassender in Aufbau und Perfomance.

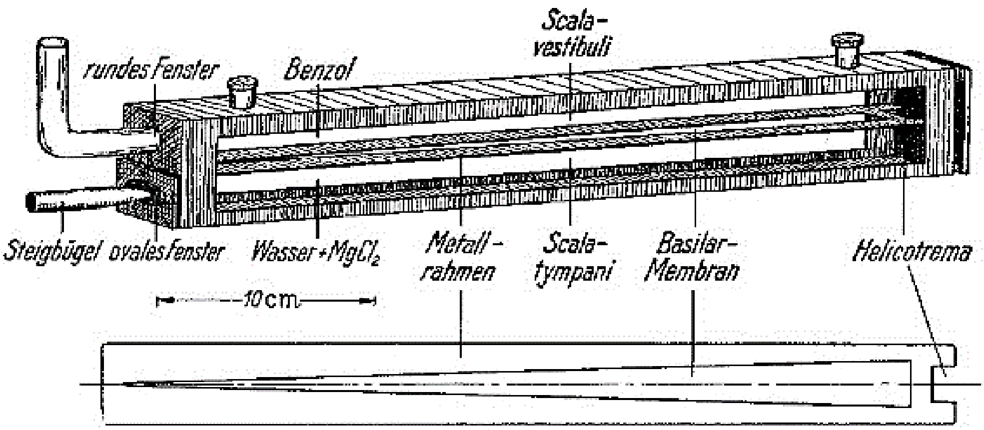


Abb. 4-1
Lineares Modell der Hörschnecke (ähnliche Modelle sind von Diestel und Dorendorf bekannt).[7]

Zwei Kammern rechteckigen Querschnitts sind mit Glaswänden abgeschlossen und mittig durch eine hochelastische Membran von keilförmigem Zuschnitt getrennt. Als Membran dient die Grenzfläche zweier Flüssigkeiten verschiedener Dichte und Oberflächenspannung (oben

[7] Pohl: Einführung in die Physik (Bd. 1).

Benzol, unten Wasser mit einem Additiv). Der Steigbügel wirkt – über einen Exzenter angetrieben – auf das ovale Fenster ein. Dieses wird somit zum Ausgangsort einer Wellengruppe, die entlang der Basilarmembran in Richtung des Schneckenlochs wandert. Auch bei sinusförmiger Erregung bilden sich charakteristische Wellengruppen aus, deren Gruppengeschwindigkeit nach Erreichen der maximalen Amplitude rasch abfällt.

Unterschiede zum Modell:

Real besteht die Schnecke aus einer knöchernen Hülle, die drei übereinander liegende spiralig aufgewickelte konische Röhren (Gänge) enthält. Basilarmembran und Schneckenkanal wirken zusammen als mechanisches Resonatorsystem. Weil die Breite der keilförmgen Basilarmembran (anfangs schmal und dick) – und auch der Durchmesser des Schneckenkanals – vom ovalen Fenster zum *Helicotrema* hin zunehmen, ändern sich stetig die örtlichen mechanischen Eigenschaften des Systems entlang des Schneckenganges. Dies führt dazu, dass die Basilarmembran für unterschiedliche Frequenzen an unterschiedlichen Stellen ihr Erregungsmaximum (Resonanz) besitzt. Dazu ist die Basilarmembran in etwa 24 gleich lange Abschnitte (Frequenzgruppen) unterteilt. Die Breite einer Frequenzgruppe beträgt ca. 100 Hz bei Frequenzen bis 500 Hz und eine kleine Terz oberhalb von 500 Hz. Wegen der hohen Steife der Basilarmembran erzeugen hohe Frequenzen in der Nähe des ovalen Fensters ein Amplitudenmaximum. In Richtung Helicotrema, wo die Membran breiter und dünner wird, schwingt sie dagegen mit niedrigerer Frequenz (bei größerer Amplitude). Für diese Erkenntnisse bekam Békésy 1961 den Nobelpreis.

Fazit:

Die mechano-elektrische Schallwandlung im Gehör und die anschliessende Informationsverarbeitung von Signalmustern im Gehirn zählen zu den anspruchsvollsten Vorgängen in der Natur, die mir immer wieder allergrössten Respekt bezüglich des unsichtbaren "Watchmakers" abverlangen. Selbst heute ist noch vieles nicht restlos geklärt.[8]

4.2 Tonhöhenskalen

Zur Bewertung empfundener Tonhöhen wurden zwei Skalen entwickelt. Mitels psychoakustischer Versuche kann so die Tonheitsskala bestimmt werden.

4.2.1 Mel-Skala

Das Mel (von "melody") ist die Masseinheit für die psychoakustische Größe "Tonheit Z" und beschreibt die die Tonhöhenwahrnehmung. Die Mel-Skala wurde 1937 von Stevens, Volkman und Newmann vorgeschlagen.

Es gibt zwei Definitionen der Mel-Skala, die sich jeweils im Referenzwert unterscheiden:

a) Nach Stanley Smith Stevens ist der Referenzton mit f = 1'000 Hz die Bezugsbasis der Mel-Skala (Z = 1'000 mel).

b) Nach Eberhard Zwicker ist der muskalische Ton C die Bezugsbasis der Mel-Skala (Z = 131 mel).

In beiden Definitionen gilt: Ein Ton, der doppelt so hoch wahrgenommen wird, erhält den doppelten Tonheitswert; ein Ton, der halb so hoch wahrgenommen wird, den halben Tonheits-

[8] http://de.wikipedia.org/wiki/Universalien_der_Musikwahrnehmung

wert.

4.2.2 Bark-Skala

Diese nach Heinrich Barkhausen benannte psychoakustische Skala für die wahrgenommene Tonhöhe ist definiert von 0,2 bis 25 Bark. Eine Verdoppelung des Bark-Wertes bedeutet, dass der entsprechende Ton als doppelt so hoch empfunden wird.

Es gilt: 1 bark = 100 mel

Normiert werden Bark- als auch modifizierte Mel-Skala auf den musikalischen Ton C (131 Hz).

4.3 Physikalische Grössen

Abschliessend die gebräuchlichsten im Kontext vorkommenden physikalischen Grössen, die für messtechnische Zwecke nützlich sind.

▶ **Schallschnelle** in [m/s] → Darunter versteht man die Schwinggeschwindigkeit der Teilchen eines Mediums.

$$v = \omega \cdot y_{max} \cdot \cos(\omega t)$$

y_{max} Spitzenwert (Amplitude)
ω Kreisfrequenz
ωt Phasenwinkel

Daraus folgt für die max. Schnelle:

$$v_{max} = \omega \cdot y_{max}$$

Meist wird die Schallschnelle nicht gemessen, sondern aus dem Schalldruck errechnet.

▶ **Schalldruck** in [N/qm] → Darunter versteht man die in einer Schallwelle vorkommenden periodischen Druckabweichungen (Unter-, Über- und Wechseldruck).

$$p = \omega \cdot \rho \cdot c \cdot y_{max} \cdot \cos(2\pi) \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

ρ Dichte des Mediums
c mediumspezifische Schallgeschwindigkeit
T Schwingungsdauer (Periode)
λ Wellenlänge
x Abstand vom Wellenzentrum

Daraus folgt für die Druckamplitude:

$$p_{max} = \rho \cdot c \cdot \omega \cdot y_{max} = \rho \cdot c \cdot v_{max}$$

▶ **Schallintensität** (Schallstärke) in [W/qm] → Darunter versteht man das Verhältnis der auf eine Fläche treffenden Schalleistung zur Grösse dieser Fläche.

$$J = P/A$$

▶ **Schallpegel** in [dB] → Darunter versteht man ein logarithmisches Vergleichsmass zweier Schallintensitäten oder Schalldrücke.

a) $L_J = 10 \lg (J/J_o)$ in [dB]

J zu bestimmende Schallintensität; J_o Bezugsschallintensität [1 pW/qm]

b) $L_p = 20\lg(p/p_o)$ in [dB]

p zu bestimmender Schalldruck; p_o Bezugsschalldruck [20 µPa]

▶ **Relativer Schallpegel** in [dB] → Darunter versteht man die Differenz zweier absoluter Schallpegel $L_1 - L_2$.

a) $\Delta L_J = 10\lg(J_1/J_2)$ in [db]

b) $\Delta L_p = 20\lg(p_1/p_2)$ in [dB]

Eine bekannte Anwendung ist das in der Bautechnik verwendete Schalldämm-Maß.

$R = 10\lg(J_1/J_2)$ in [dB] $= 20\lg(p_1/p_2)$ in [dB]

▶ **Lautstärkepegel** in Phon [phon] → Darunter versteht man eine physiologisch bedingte Grösse (Lautstärke, die subjektiv als Schallstärke empfunden wird).

$L_N = 20\lg(p/p_o)$ in [phon]

p Schalldruck eines gleich laut empfundenen 1'000 Hz Tones
p_o Bezugsschalldruck [20 µPa]

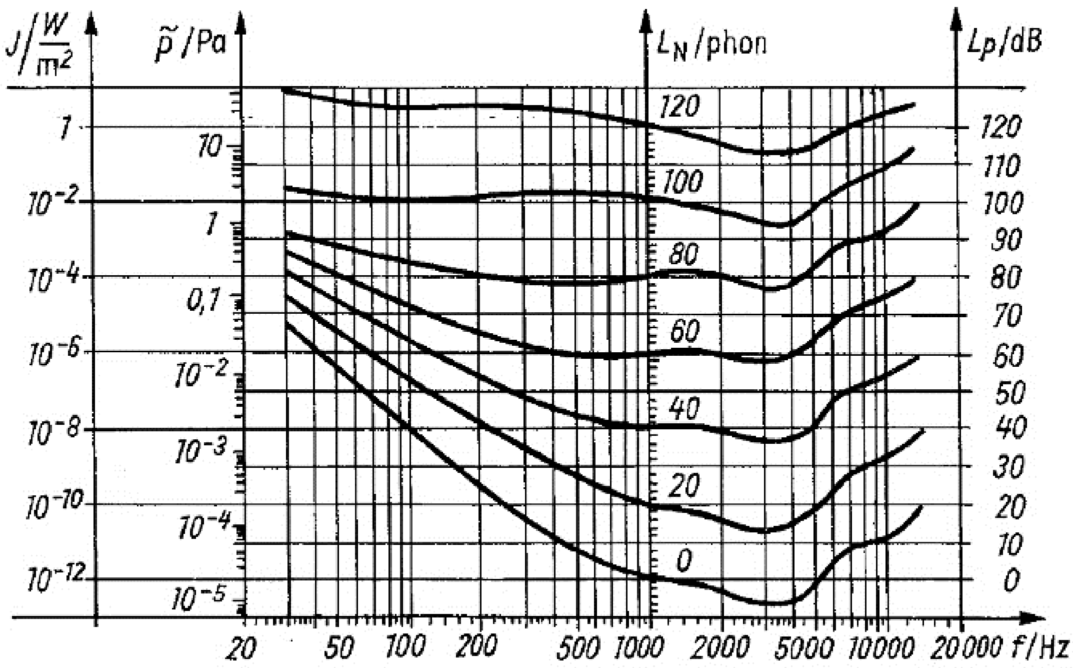


Abb. 4-2
Pegeldiagramm[9]

Beachte: Für einen Ton mit f = 1'000 Hz stimmen Schalldruckpegel L und Lautstärkepegel L_N überein. Die Schallempfindung wächst gemäss dem Weber-Fechnerschen Gesetz mit dem Logarithmus der Schallintensität.

[9] Kuchling: Taschenbuch der Physik.

4.4 Physikalische Fingerübungen

4.4.1 Aufgaben

α) In einer kugelförmigen Lautsprecherbox – wie soll's auch anders sein – breitet sich der Schall kugelsymmetrisch aus. In welcher Beziehung steht die Schallintensität zum Kugelradius der Box?

β) Bei einer Gehörprüfung vernimmt der Proband ein in 3 m Entfernung leise gesprochenes Wort noch gut, in 8 m Entfernung jedoch nicht mehr. Wie gross ist demzufolge der Schall-druckpegel in 3 m Abstand?

γ) Ein Träger aus Chromnickelstahl (ρ = 8 kg/dm³) mit den Abmessungen l = 4 m und A = 0.01 m^2 wird mit einem Gewicht von 1 t in Achsrichtung belastet. Mit einem Ultraschallsignal (axiale Laufzeit = 0,6 ms) soll die Längenänderung (Deformation) des Trägers ermittelt werden. Wie gross ist diese?

4.4.2 Lösungen

α) Die Schallintensität ist repräsentant für die Energiedichte (Schallleistung durch Kugelober-fläche: $A = 4\pi r^2$).

Daraus folgt: Schallintensität: $J \sim 1/r^2$

β) $J_1/J_2 = r_2^2/r_1^2$; $J_2 = 9J_1/64$

$L_1 - L_0 = 10\lg(64/9) = 8{,}5\ \mathrm{dB}$

γ) Nach Hooke gilt: $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Aus Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$ und Zugspannung $\sigma = F/A = mg/A$ folgt die Deformation:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = l \cdot m \cdot g/(E \cdot A)$$

In festen Körpern gilt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwelllen die Beziehung:

$$c = \sqrt{(E/\rho)} = l/t$$

Daraus folgt: $E = \rho \cdot l^2/t^2$

so dass: $\Delta l = m \cdot g \cdot t^2/(\rho \cdot l \cdot A) = 1{,}104\text{e-}5\ \mathrm{m}$

5 Schwingungen und Wellen

Zum Problem der schwingenden Saite (für gestandene Physiker ein Klacks, für sonstige Leser womöglich eine nützliche Wissenserweiterung) die nachfolgenden Erörterungen.

5.1 Historischer Exkurs

Bereits die Pythagoräer beschäftigten sich mit der schwingenden Saite des Monochords und stellten einen Zusammenhang zwischen der Länge und der Tonhöhe fest.

Gaudentius bemerkt dazu:

> Pythagoras spannte eine Saite über einen Kanon (Maßstab) und teilte ihn in zwölf Töne. Dann liess er zunächst die ganze Saite ertönen, darauf die Hälfte, d.h. sechs Teile, und er

fand, dass die ganze Saite zu ihrer Hälfte konsonant sei, und zwar nach dem Zusammenklang der Oktave. Nachdem er darauf die ganze Saite, dann Dreiviertel von ihr hatte erklingen lassen, erkannte er die Konsonanz der Quarte und analog für die Quinte.

Ungeachtet aller geistigen Bemühungen der Antike wurde das Kernproblem erst im ausgehenden 18. Jahrhundert befriedigend gelöst, als man bereits im Besitze des "Calculus" war und allmählich auch mit partiellen Differentialgleichungen umzugehen verstand. Vorauslaufend erfolgten die mit einem experimentellen Ansatz behafteten Arbeiten von Mersenne (Harmonie Universelle, 1636) und Galilei (Discorsi, 1638), die aber nicht über die elementarsten Aspekte hinausgingen.

Das Problem ist nämlich folgendes:

Eine beidseitig fest eingespannte elastische Saite schwingt nebst ihrer Grundmode (L = λ/2) auch auf ganzzahligen Vielfachen. Diese Moden werden als Harmonische n-ter Ordnung bezeichnet. Darüber wussten die Alten einfach zuwenig. Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, dass beim Anzupfen einer Saite kurzzeitig eine Dreieckskonfiguration und demzufolge eine Knickfunktion entsteht. Wie sollte daraus überhaupt eine harmonische Schwingung hervorgehen und wie konnten auf der Saite zugleich mehrere Harmonische schwingen?

Im Beispiel der gezupften Saite ist die Anfangsgeschwindigkeit Null, so dass gilt:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}[F(x-ct) + F(x+ct)]$$

Ohne die Verwendung von Fourierreihen ein vermutlich kaum zu bewältigendes Problem.

Weitere Klarheit auf dem dornigen Pfad der Erkenntnis erbrachte die Wellengleichung von d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u(x, t)	Auslenkung der Saite am Ort x zur Zeit t
c	positive Konstante (Ausbreitungsgeschwindigkeit der auf der Saite entstehenden Welle)

Unter einer Welle wird eine sich im Raum oder auch in Materie ausbreitende Oszillation verstanden, deren Schwingungsrichtung von der Beschaffenheit des Mediums (Aggregatzustand, Geometrie) abhängig ist. Einem derartigen von der Quelle sich ablösenden Wellenzug kann ein Impuls und eine Energiedichte zugeordnet werden.

(Für Wellen in flachem Wasser muss man stattdessen die Korteweg-de-Vries-Gleichung bemühen.)

In der Folge trug Euler mit seinen Arbeiten "Über Kettenbrüche" (1737) und "Über die Schwingungen einer Saite" (1748) zur Lösung des uralten Problems bei, indem er gedanklich die Eigenschwingungen eines mit Perlen besetzten masselosen elastischen Fadens untersuchte. Daniel Bernoulli stellte den Satz auf, dass die Lösung des Problems der frei schwingenden Saite als trigonometrische Reihe darstellbar ist. Der sich daraus ergebende Disput zwischen Euler, d'Alembert und Bernoulli erstreckte sich über Jahrzehnte. Eigentlich eine Satire und an sich unnötig, ganz im Sinne von: Keiner will die Formeln des anderen lesen. Danach gelang Lagrange der entscheidende Beleg, wie man durch Grenzübergang von der Lösung des Problems der Schwingungen einer Perlenschnur zur Lösung des Problems der Schwingungen einer homogenen Saite gelangt.[10]

Den Abschluss dieser Entwicklung bildete Fourier (1822) mit seiner Untersuchung über die Wärmeausbreitung in Festkörpern (Théorie analytique de la chaleur). Die von Fourier dazu benutzten trigonometrischen Reihen werden als Fouriereihen bezeichnet und die diesbezügliche Analyse als Fourieranalyse. Es lässt sich nachweisen, dass jede periodische Funktion als eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellbar ist. Dies war der Schlüssel zur Erweiterung der erforderlichen Kenntnisse. Fortan konnten schier beliebige Schwingungen (Klänge) in ihre spektrale Zusammensetzung zerlegt werden. Der Weg vom Monochord des Pythagoras bis zur mathematischen Beherrschung der schwingenden Saite war in der Tat ein weiter.

6.2 Schwingungen

Unter einer diesbezüglichen Schwingung versteht der Fachmann eine periodische Auslenkung einer Masse (Feder, Fadenpendel, Saite) aus ihrer Ruhelage. Dabei wandelt das System seine kinetische Energie abwechselnd in potentielle und wiederum in kinetische um. Im Unterschied zu einer Welle handelt es sich um ein räumlich begrenztes und somit rein zeitliches Phänomen.

6.2.1 Charakteristische Grössen einer Schwingung

- Elongation y(t): momentane Auslenkung aus der Ruhelage
- Amplitude y_o bzw. A: maximale Auslenkung (Schwingungsweite)
- Periodendauer T: Dauer eines vollständigen Schwingungsvorganges
- Frequenz f: Anzahl Schwingungen pro Zeiteinheit

Die einfachste zu untersuchende Schwingung ist die harmonische, bei der die Rückstellkraft stets proportional zur Elongation ist und somit ein lineares Kraftgesetz (Hooke'sches Gesetz) gilt (Abb. 6-1).

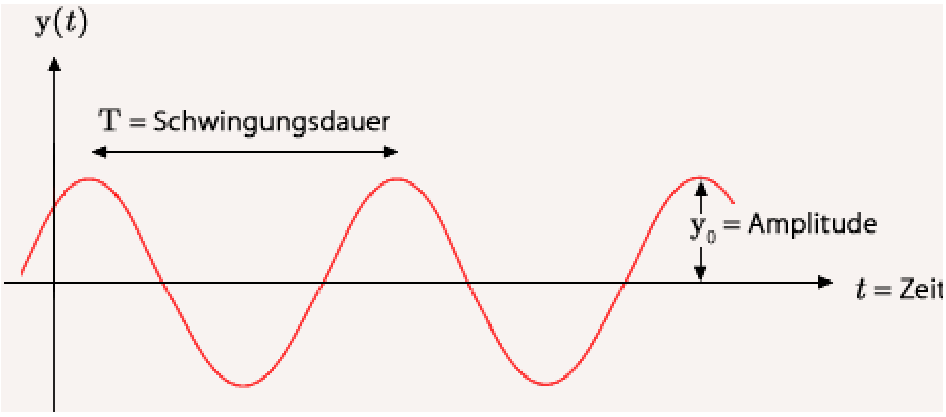


Abb. 6-1
Harmonische Schwingung: $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_o)$

[10] Szabo: Geschichte der mechanischen Prinzipien (Birkhäuser).

Die Frequenz derartiger Sinusschwingungen ist unabhängig von ihrer Amplitude. Sind an der Erregung mehrere Kräfte beteiligt, erfolgt eine Überlagerung (Superposition) der Kräfte.

Für die Gesamtkraft lässt sich im Kontext der folgende Ausdruck entwickeln:

$$\mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot \omega^2 \cdot \mathrm{y(t)} = \text{-}\mathrm{D} \cdot \mathrm{y(t)}$$

Der Proportionalitätsfaktor D wird als "Richtgrösse" bezeichnet (bei einer Feder die sog. Federkonstante). Ohne fortlaufende Erregung klingt jede sich selbst überlassene Schwingung infolge der unvermeidlichen Reibung und Dissipation mit der Zeit ab.

Die Bewegungsgleichung (mit R als Reibungskoeffizient) lautet somit:

$$\mathrm{my''} + \mathrm{Ry'} + \mathrm{Dy} = 0$$

Es gilt für die Abklingfunktion:

$$y = A \cdot e^{-kt}$$

Solche gedämpft verlaufende Schwingungen werden auch als "freie Schwingungen" bezeichnet. Die Frequenz einer freien Schwingung ist die Eigenfrequenz des Schwingers. Weil Eigenschwingungen energetisch günstigen Gesichtspunkten genügen, gilt: Je höher die Frequenz, desto geringer die Amplitude. Soll die Schwingung aufrecht erhalten werden, muss dem System periodisch Energie zugeführt werden. Solche Schwingungen werden als "erzwungene Schwingungen" bezeichnet; deren Amplitude wächst mit Annäherung an die Eigenfrequenz an und wird im Resonanzfall maximal. Im Extremum kann es zur sog. Resonanzkatastrophe kommen (Beispiel Tacoma-Narrows-Bridge, 1940), bei der mechanische Zerstörung die Folge ist.

6.2.2 Die Formel von Taylor

Als einem der ersten in die zu untersuchende Problematik involvierten Mathematiker gelang es Brook Taylor (nach welchem die Taylorreihen benannt sind) eine für die schwingende Saite griffige Formel zu finden, die auch dem Instrumentenbauer in praxisgemässer Form geläufig ist. Taylor berücksichtigte dabei nur die sinusförmige Grundschwingung bzw. die Halbschwingung des Grundzustandes der Saite:

$$f = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

$\rho \cdot A$ Masse m pro Längeneinheit

Demzufolge gilt:

Bei gleichbleibender Frequenz und Verdoppelung der Saitenlänge muss die Zugkraft erhöht werden (ohne dass freilich der Zargen oder sonstwas reisst); äquates gilt auch bei Verdopplung der Saitenmasse. Als Materialien kommen Metalldrähte (Stahl, Bronze) oder Darm – heutzutage auch Kunststoffschnüre – in Betracht. Für tiefe Töne werden bewusst dicke Saiten gewählt (wie dies von der Bassgitarre bekannt sein dürfte). Weitere Komplikationen zum Problem (wie Biegesteifigkeit der Saite, Nichtlinearität der Saitenschwingungen und Rotationsträgheit der Saitenelemente) konnten zu Taylors Blütezeit noch nicht behandelt werden.

Nebst dem obig berechneten Grundton kommen real immer auch Obertöne (seltener Subharmonische) vor, die das charakteristische Klangbild mitbestimmen. Es bilden sich entlang der Saite Schwingungsmoden mit feststehenden Schwingungsknoten aus. Die Schwingungsperiode einer tieferen Mode ist stets ein ganzzahliges Vielfaches einer höheren Mode.

7 Eigenschwingungen von Membranen

Im Vorkapitel lag der Schwerpunkt auf der schwingenden Saite (schwingende Stäbe wurden nicht behandelt). Jetzt sollen schwingende Flächen (Flächenhäute) – und damit eine Erweiterung der Wellengleichung in 2 Dimensionen unter Beizug des Laplace-Operators – in den Vordergrund rücken.[11]

Bei einer schwingenden Membran handelt es sich um eine ansonsten schlaffe, nun aber unter Zugspannung σ stehende Haut. Diese verkörpert das zweidimensionale Analogon der schwingenden Saite. Demzufolge muss die Wellengleichung umgeschrieben werden in eine partielle Differentialgleichung in x, y und t. Dies gelingt unter der Voraussetzung, dass die partielle Ableitung $\partial^2 u/\partial x^2$ durch den Laplace-Operator Δ ersetzt wird, somit:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 u}{\partial t^2}$$

u Auslenkung senkrecht zur Membran

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c wird durch die Materialkonstante der Membran bestimmt:

$$c = \sqrt{}(\sigma/\rho)$$

Um die Schwingungen eines elastischen Mediums (Membrane) im Dreiraum zu beschreiben, wird die Wellengleichung in modifizierter Form bemüht:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2 u}{\partial t^2} = 0$$

u(x,y,t) Amplitude (als Funktion von Ort und Zeit)

7.1 Kreismembrane

Gegeben sei eine an den Rändern fest eingespannte kreisrunde Membran einer Trommel, die gegen die Mitte leicht nach aussen gewölbt ist. Zur Behandlung der Problematik verwenden wir eine Prozedur, welche dieLaplace-Gleichung erfüllt - mit dem eklatanten Unterschied, dass anstelle des ansonsten üblichen Differentialoperators ein Differenzenoperator vorkommt:

$$\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta y^2} = 0$$

u Höhe über der x,y-Ebene

(als Randwerte nehmen wir u = 0 für den äusseren Rand und u = 1 für die Innenzone an)

Damit lässt sich die Membranfläche mittels CAS oder dazu geeigneter Standardprogramme modellieren.

Gehen wir nun zu flächenhaften Kontinua mit Lösungsansatz über:

Für den hier betrachteten Sonderfall einer kreisförmigen Membran wird der Laplace-Operator mit Vorteil in Polarkoordinaten r und ϕ dargestellt.

[11] Korsch: Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik (Binomi Verlag).

Lösen lässt sich die diesbezügliche Dgl. mit dem Bernoulli-Ansatz:

$$u = \Psi(r,\varphi) \cdot \sin(\omega t)$$

Bei vollständiger Kreissymmetrie der Membrane folgt daraus eine gewöhnliche Differentialgleichung für Ψ(r) mit homogenen Randbedingungen. Mittels diesen lässt sich die Lösung durch Besselfunktionen angeben:

$$\Psi(r) = k \cdot J_n(r) \; ; k = \text{const.}$$

Die Erfüllung der 2. Randbedingung Ψ(R) = 0 liefert für kreisförmige Knotenlinien die Eigenwerte der Schwingungen kreisförmiger Membranen. Deren Frequenzen sind proportional zu den Nullstellen y_0,m der Besselschen Funktionen:

$$f_0, m = \frac{y_0, m}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

m = 1, 2, 3, ... steht für die Anzahl kreisförmiger Knotenlinien (Moden) auf der Membran (Abb. 7-1).

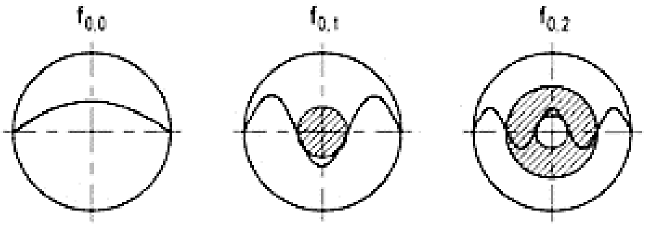


Abb. 7-1
Kreismembrane mit Knotenlinien

Allgemeine Lösungen stellen Eigenfunktionen Ψ = (r,ϕ) mit kreisförmigen als auch geradlinigen Knotenlinien.

7.2 Rechteckmembrane

Gegeben sei eine an den Rändern fest eingespannte Rechteckmembran mit den Seitenlängen a und b (bzw. den Koordinaten x und y). Die Auslenkung u senkrecht zur x,y-Ebene soll der zweidimensionalen Wellengleichung genügen.

Zudem soll gelten:

$$u(x = 0, y, t) = u(x, y = 0, t) = u(x = a, y, t) = u(x, y = b, t) = 0$$

Zur Lösung der Wellengleichung wird ein Separationssatz angewandt (mit den sich daraus ergebenden Linearkombinationen von Sinus- und Kosinusfunktionen) - somit:

$$u(x, y, t) = A \cdot \sin(p \cdot x) \cdot \sin(q \cdot y) \cdot \cos(r \cdot c \cdot t + a)$$

(damit werden die Randbedingungen bei x = 0 und y = 0 erfüllt)

Die Bedingungen lauten dann:

$$p = \frac{m \cdot \pi}{a} \; ; m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$q = \frac{n \cdot \pi}{b} \; ; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Frequenzen der Eigenschwingungen berechnen sich dadurch wie folgt:

$$u(x,y,t) = A \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot sin\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \cdot \cos\left(\omega_m, nt + \varphi\right)$$

Für die unteren Eigenfrequenzen einer Rechteckmembran mit a = (√2)b gilt dann:

$$\frac{\omega_m, n}{\omega_1, 1} = \sqrt{m^2 + \frac{2n^2}{3}}$$

mit m, n = 1, 2, 3, ...

Die Schwingungsmoden gleichen in diesem Fall einem mit der Dauer 2π/ω_m,n alternierenden Schachbrett mit abwechselnd positiven und negativen Auslenkungen (Abb. 7-2). Bestimmte Moden sind mit sog. Entartungen behaftet, d.h. dass deren Eigenfrequenzen gleich gross ausfallen.

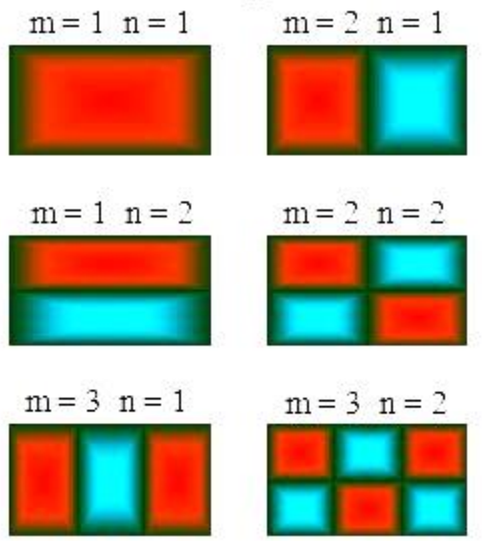


Abb. 7-2
Schwingungsmoden einer Rechteckmembran:

In Summe kristallisiert sich immer deutlicher heraus, dass die "Physik der Musikinstrumente" ohne den Einsatz der höheren Mathematik ein hoffnungsloses Unterfangen bliebe. Aus diesem Grunde dauerte es auch so lange, bis die damit assoziierten Probleme eine Lösung fanden. Die ansonsten hervorragenden Kenntnisse der alten Geometer aus dem Orient reichten dazu schlichtweg nicht aus.

8 Stäbe und Platten

Wir kommen nun zu schwingenden Stäben (Zungen) und schwingenden Platten.

8.1 Wellenformen in Stäben

In schwingenden Stäben kommen unterschiedliche Schwingungen resp. Wellen vor.

1) stehende Dehnwellen (Abb. 8-1)
2) stehende Torsionswellen (Abb. 8-2)
3) stehende Biegewellen (Abb. 8-3)

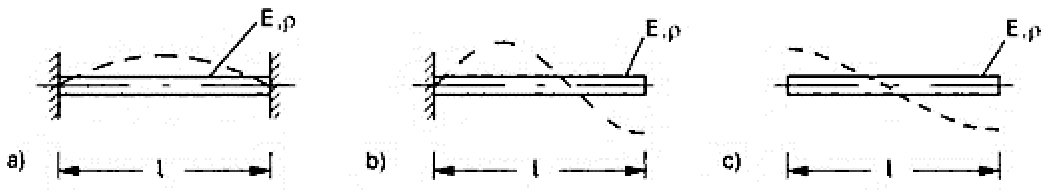


Abb. 8-1
Dehnwellen

Die Eigenfrequenzen berechnen sich für a (beidseitig eingespannt) und c (beidseitig freie Enden) mit:

$$f = \left(n + \frac{1}{2}l\right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Die Eigenfrequenzen des freien Stabes sind völlig unharmonisch; man versuche sich an den charakteristischen Klang des Glockenspiels (bestehend aus einer Reihe meist rechteckiger Stahl- oder Aluminiumstäbe) mit seinem harten und etwas klirrenden Ton zu erinnern. Bei anderen Stabspielen (Marimba, Xylophon und Vibraphon) werden die Eigenfrequenzen durch Auskehlung des Stabes in ein näherungsweise harmonisches Verhältnis gebracht.

Für b (einseitig eingespannt) gilt:

$$f = \left(2n + \frac{1}{4}l\right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E Elastizitätsmodul
n = 0, 1, 2, 3, ...
n_0 Grundschwingung (1. Harmonische)
n_1, n_2, n_3, ... Oberschwingungen (n-te Harmonische)

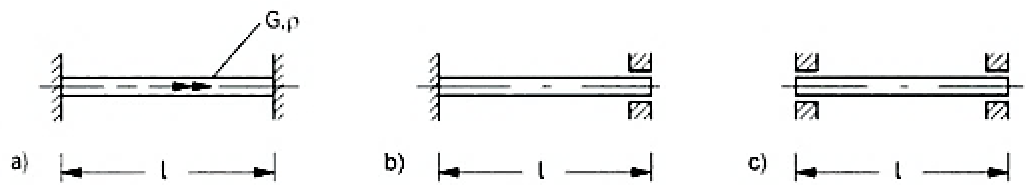


Abb. 8-2
Torsionswellen

Analog zu den Dehnwellen gilt für Torsionswellen:

$$f = \left(n + \frac{1}{2}l\right) \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$f = \left(2n + \frac{1}{4}l\right) \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G Schermodul

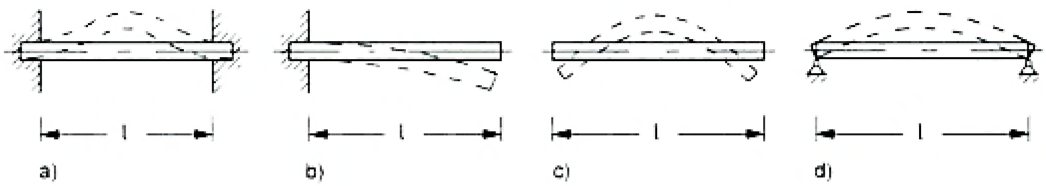


Abb. 8-3
Biegewellen

In biegesteifen Stäben bilden sich bei entsprechender Anregung stehende Transversalwellen aus.

Die Biegefrequenz berechnet sich mit:

$$f = \frac{\alpha^2}{l^2} \cdot \frac{l}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot l}{\rho \cdot A}}$$

Die α-Werte (Eigenwerte) sind von den Randbedingungen abhängig und einem entsprechenden Tabellenwerk (z.B. Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau) zu entnehmen.

8.2 Platten

Dünne isotrope und biegesteife Platten sind die zweidimensionale Erweiterung des linearen Stabes (Schalen und Glocken diejenige eines gekrümmten Stabes).

Stillschweigend soll gelten: Massendichte ρ = ∆m/∆V = const.

Es sind folgende Randbedingungen zu unterscheiden: frei, einfach unterstützt und eingespannt.

Nebst longitudinalen und transversalen Wellen (nicht-dispersiv; keine signifikante Schallabstrahlung) treten Biege- oder Verformungswellen (dispersiv; signifikante Schallabstrahlung) in Erscheinung.

a) Geschwindigkeit longitudinaler Wellen in unendlich ausgedehnten Platten:

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot (1 - v^2)}$$

b) Geschwindigkeit longitudinaler Wellen in dünnen Platten:

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-v^2)}{\rho}(1+v)(1-2v)}$$

c) Geschwindigkeit transversaler Wellen in unendlich ausgedehnten flachen Platten:

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \approx 0.6\, c_l$$

d) Phasengeschwindigkeit von Biegewellen:

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c_l \cdot k \cdot h}{\sqrt{12}}$$

e) Gruppengeschwindigkeit von Biegewellen:

$$c_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2 \cdot v_{ph}$$

Ein im Allgemeine schwieriges Problem ist die math. Behandlung dünner Rechteckplatten. Bei einfacher Unterstützung entstehen kreisförmige Knotenlinien (m,n) wie bei der Membran. Bei veränderten Randbedingungen entstehen durch Mischung der (m,n)- und (n,m)-Moden auch gekrümmte Knotenlinien. Schwingende rechteckige Platten dienen als Modell für Decke und Resonanzboden von Musikinstrumenten (Violine, Bratsche, Gitarre).

Bei quadratischen Platten sind dem Schreiberling ausser den Fundamentalmoden zahlreiche weitere Moden und Knotenlinien als "Chladnische Klangfiguren" bekannt. Die frei schwingende quadratische Platte dient als Modell für den Biegewellenwandler (DML) in der Lautsprechertechnik.

9 Röhren- und Helmholtzresonatoren

9.1 Röhrenresonatoren

Röhrenresonatoren (akustische Schwinger ohne bewegliche Teile) kommen insbesondere für Blasinstrumenten in Betracht. Konstruktiv werden sie wahlweise mit einem geschlossenen und einem offenen Ende oder mit zwei offenen Enden gebaut (Abb. 9-1).

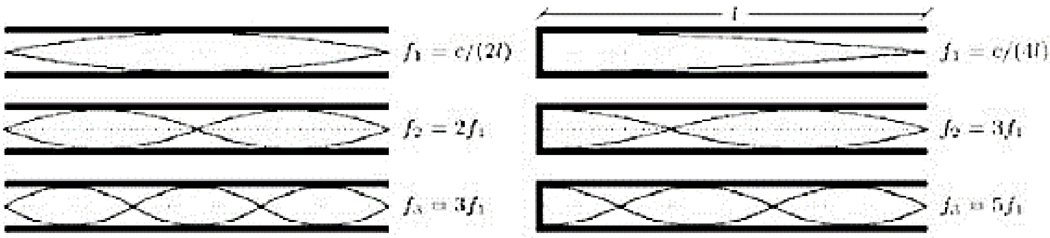


Abb. 9-1
Röhrenresonator (Prinzip)[12]

links: λ/2-Resonator (beidseitig offen) mit allen harmonischen Teiltönen

rechts: λ/4-Resonator (einseitig offen) mit ungeradzahligen Teiltönen

[12] Görne, Tontechnik (Hanser).

Die tieferen Eigenfrequenzen der Röhre erzeugen durch Wechselwirkung mit dem Tonerzeuger (Rohrblatt, Lippen) die für das jeweilige Instrument charakteristischen Töne. Die höheren Eigenfrequenzen wirken als akustisches Filter und bestimmen die individuelle Klangfarbe.

a) Das beidseitig offene zylindrische Rohr ist ein Modell für sämtliche Flöten (Blockflöte, Querflöte) und für die offenen labialen Orgelpfeifen. Beim Bau eines realen Instrumentes ist die Mündungskorrektur zu berücksichtigen. Die Eigenfrequenzen stehen im Verhältnis 1:2:3:4...

b) Das einseitig geschlossene Rohr besitzt an seinen beiden Enden unterschiedliche Randbedingungen. Es dient als Modell für Klarinette und gedeckte Orgelpfeife. Am offenen Ende muss ein Schalldruckknoten erscheinen, am geschlossenen Ende ein Schalldruckmaximum. Auch hier muss die Mündungskorrektur berücksichtigt werden. Die Eigenfrequenzen stehen im Verhältnis 1:3:5:7...

c) Komplizierter als das zylindrische ist das konische Rohr. Es ist ein Modell für Oboe und Fagott. Obwohl einseitig geschlossen, ist es ein λ/2-Resonator zur Bildung von Kugelwellen-Abschnitten.

d) Der bei den meisten Blasinstrumenten vorkommende Schallbecher – als Aufweitung am Rohrende – macht das akustische Verhalten noch erheblich komplizierter. Das einseitig geschlossene Rohr mit Schallbecher dient als Modell für Trompete und Posaune, das konische Rohr mit Schallbecher für Horn und Flügelhorn und in speziellem Sinne für das Saxophon.

9.2 Helmholtz-Resonator

Etwas anders funktioniert der Helmholtz-Resonator (als akustisches Analogon zum Masse-Federpendel, Abb. 9-2).

Abb. 9-2
Helmholtzresonatoren unterschiedlicher Eigenfrequenzen[13]

Konstruktiv sind kugelförmige als auch quaderförmige Resonatoren denkbar. Entwickelt wurde dieses nahezu verschleissfreie Gerät vom Physiker und Physiologen Hermann von Helmholtz (1821-1894) für die akustische Spektralanalyse.

[13] http://sites.google.com/site/futurephysics/Home/helmholtz_resonator_1.jpg

Die Luft in der kleinen Öffnung wirkt als schwingende Masse, das eingeschlossene Luftvolumen wie eine Feder.

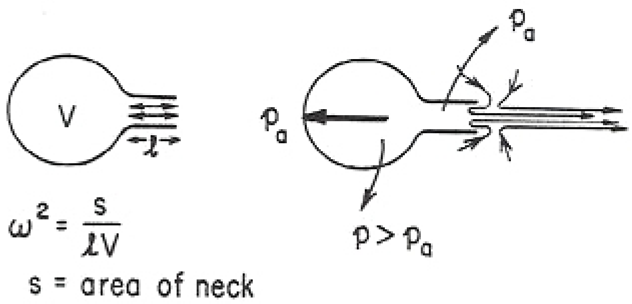


Abb. 9-3
Prinzip des Helmholtzresonators

Wie beim Masse-Federpendel existiert auch beim Helmholtz-Resonator eine ausgeprägte Eigenfrequenz, die von den geometrischen Abmessungen und Systemparametern abhängig ist:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

k Federkonstante
M träge Masse

Bestimmung der Resonanzfrequenz:

$$f = \frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A}{l_{eff}} V}$$

A Querschnittsfläche an der Öffnung des Resonatorhalses

$l_{eff} = 2\Delta l$ l ist die Länge des Mündungshalses

Im Resonanzfall ist die vom Resonator aufgenommene Schallenergie maximal.

Um die effektive Mündungstiefe zu bestimmen (die Luft schwingt auch ausserhalb des Resonators) ist eine Mündungskorrektur an den Enden des Resonatorhalses um 2Δl erforderlich.

In seiner Wirkung entspricht der Helmholtz-Resonator einem Tiefpassfilter. Anwendungen finden sich als Schallabsorber schmalbandiger, tieffrequenter Raummoden und als Schallverstärker (Gitarren- und Klavierkorpus); aber auch, um Schall abzustrahlen (Bassreflexbox) oder zu filtern (Bandpassbox).

10 Glocken und Zimbeln

Steh, Wanderer, still! Denn hier entstand,
daß keine zweite möglich werde,
gebaut durch Schillers Meisterhand,
die größte Glockenform der Erde.

Glocken waren bereits im alten China der Schang-Dynastie bekannt. Durch Wandermönche kamen die Glocken im 2. Jh. auch nach Europa. Das Cymbalum (Klangschalen, Becken) aus Bronze oder Messing war zu Zeiten des Königs David in Israel verbreitet. Bekannt sind uns Heutigen die Tam-Tams (ein Metallgong, gewöhnlich durch mit Filz überzogene hölzerne Klöppel geschlagen) – von Mussorgski in "Eine Nacht auf dem Berge" als dramaturgisches Element eingesetzt. Und wer von den Aelteren unter uns kennt nicht den Schellenbaum, ein effektvolles in militärischen Marschzügen eingesetztes Instrument.

10.1 Glocken

Glocken sind im einfachsten Falle gekrümmte Platten und das flächenhafte Gegenstück einer Stimmgabel. Treicheln (Kuhglocken, Abb. 10-1) werden aus Blechen gewalzt und geschmiedet und in Maschinen geformt.

Etwas kleiner – und damit leichter – sind die Weideschellen der Kühe. Den Pferden werden bei festlichen Anlässen zuweilen kleine Glocken (Kummetrollen) angehängt. Bekannt sind die vernickelten Kreuzrollen. Bei den gegossenen Glocken besteht die Kunst darin, durch die Formgebung (Rippe) und Dicke der Wandung möglichst viele harmonische Obertöne zu erzielen. Dünnwandige Glocken klingen tiefer als dickwandige. Bewährt hat sich die "gotische Rippe" (Glockenhöhe ohne Krone = Schärfendurchmesser). Die abendländischen Glocken aus dem 9. Jh. hatten eine bienenkorbähnliche Form und klangen eher dumpf. Mitte des 12. Jh. zeichnete sich ein Wechsel zur zuckerhutförmigen Glocke mit schmaler Flanke und ausladendem Wolm ab, welche einen froheren Klang aufweist.

Abb. 10-1
Handgeschmiedete Treichel[14]

Zu Beginn des 13. Jh. entstand dann sukzessive die gotische Rippe. Insbesondere die gotische Dreiklangrippe aus dem 14. Jh.dient den Glockengiessern noch heute als Vorbild. Als Gusswerkstoff – "Glockenspeise" genannt – wird meist Zinnbronze (eine Legierung aus 78 % Kupfer und Zinn) verwendet. Kirchenglocken haben einen Namen. Eine nicht geringe Bedeutung bezüglich der Klangqualität kommt dem Klöppel aus Weicheisen oder Stahlguss zu. Zu hart darf er nicht sein.

Glocke und Klöppel bilden ein Doppelpendel. Beim Läuten schlägt der Klöppel mit dem sog. Ballen auf dem Schlagring der Glocke auf. Es entstehen Biegschwingungen im Glockenmantel.

[14] http://sites.google.com/site/futurephysics/Home/treichel.jpg

Entlang des Umfanges sind stehende Wellen zu beobachten und auf der Oberfläche entstehen Knotenlinien (Abb. 10-2).

Beim Anschlag des Glockenkörpers nimmt man den Schlagton (Nominal) wahr, der nicht in der Glocke selbst, sondern erst im Ohr als Kombinationston (?) entsteht. Das Ohr erkennt den fehlenden Grundton und empfindet diesen als Anschlagnote. Oft sind die Obertöne zum Grundton nicht harmonisch. Auch erklingen Unteroktave, Prime, kleine Terz, Quinte und Oberoktave. Man unterscheidet zwischen Prinzipalton- und Mixturbereich. Non- und Septimglocken gibt es freilich auch.

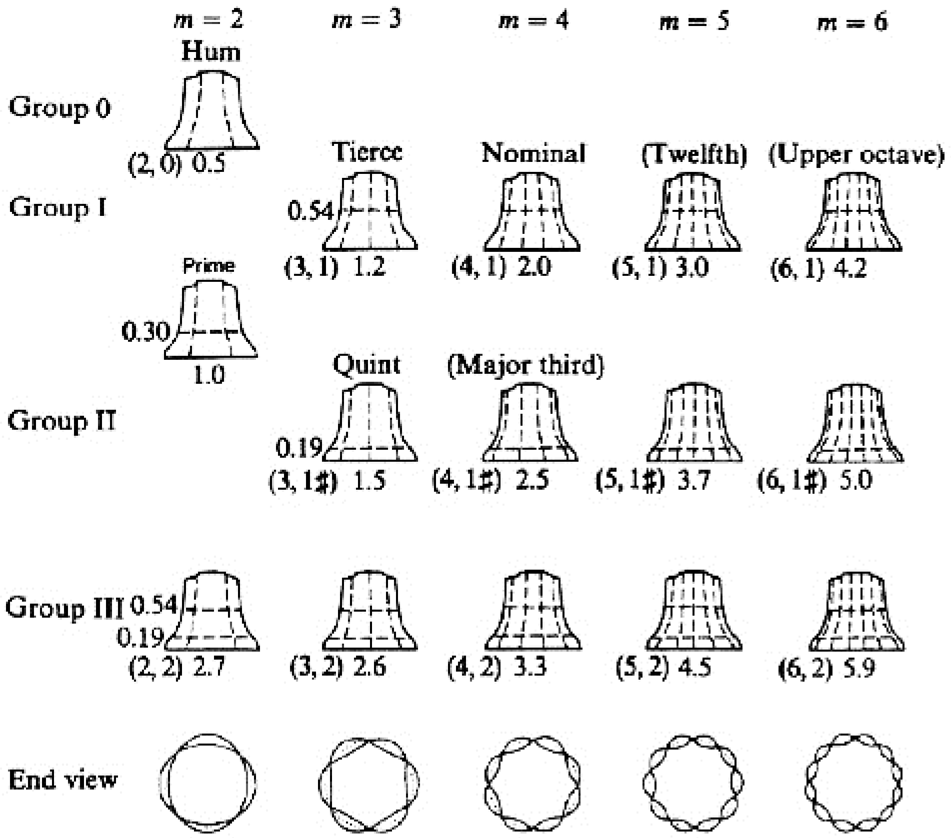


Abb. 10-2
Schwingungsmoden einer Glocke[15]

Anm.: Es gab der Legende zufolge eine Glocke auf dem Kölner Dom, die einfach nicht läuten wollte. Grund dafür war, dass Klöppel und Glocke synchron schwangen, so dass der Klöppel nie auf den Schlagring stiess. Wie konnte man dieses Problem lösen ohne die Glocke vom Glockenturm zu holen? Nun, der Klöppel wurde verlängert und dadurch schwerer gemacht. Als ihn dann die Glocke traf, folgte er dieser wegen seiner grösseren Trägheit nicht länger synchron, so dass die hin und her schwingende Glocke ihn periodisch schlagen konnte. Das Verklingen der "Pretiosa" im Kölner Domgeläute soll ein akustischer Genuss sein.

[15] Fletcher und Rossing: The Physics of Musical Instruments (1991).

10.2 Zur Wahrnehmung der Glockentöne

Der dominant empfundene Ton wird als Schlag- oder Nominalton bezeichnet. Es handelt sich um einen Residualton, weil er keiner Eigenschwingung der Glocke entspricht. Möglicherweise wird dieser Ton im Gehirn – zumindest aber im Innenohr – erzeugt. Physikalisch ist er ausserhalb nicht nachzuweisen. Nach heutiger Erkenntnis werden die Residualtöne in einem festgelegten Band der Basilarmembran aus den dort registrierten Obertönen abgeleitet. Bereits Schouten (Begründer der Residuumtheorie) konnte nachweisen, dass sie sich von den durch Nichtlinearität erzeugten Helmholtz'schen Kombinationstönen unterscheiden und durch Interferenz nicht ausgelöscht werden.

H. Riemann (1916) vermerkt dazu:

> ...daß das Musikhören nicht nur ein passives Erleiden von Schallwirkungen im Hörorgan, sondern vielmehr eine hochgradig entwickelte Betätigung von logischen Funktionen des menschlichen Geistes ist...

Seebeck seinerzeit hatte im Zuge seiner Lochsirenenexperimente folgende Schlussfolgerung gezogen:

> Das Ohr empfindet den Eindruck einer periodischen Bewegung als Ton; alle Glieder, welche an dieser Periode Theil nehmen, können [...] zur Stärke des Tons beitragen.

Fazit:

Sind genügend Obertöne vorhanden, vermag das menschliche Klangsensorium den (fehlenden) Grundton zu erkennen.

10.3 Wahrnehmung und Klang

Ohm, der das Fouriertheorem auf die Akustik übertrug, hatte bereits früh Kritik an Seebeck's These der Tonbildung durch Periodizität einer Pulsfolge geübt, indem er festhielt, dass bei einer sinusförmigen Schwingung immer diejenige Tonhöhe als Grundtonhöhe wahrgenommen wird, die der Frequenz der Schwingung entspricht. Seebeck wiederum hielt fest, dass die Anwesenheit einer Sinusschwingung bestimmter Frequenz nicht grundlegend zum Hören einer Tonhöhe dieser Frequenz sei. Ohm ging jedoch davon aus, dass dieses Phänomen der "akustischen Illusion des Ohres" zuzuschreiben sei. Seebeck zeigte sich immerhin versöhnlich, indem er erklärte, dass die unterschiedliche Klangfarbe von Tönen gleicher Frequenz nur durch die Zerlegbarkeit der periodischen Schwingung in ihre Sinuskomponenten zu verstehen sei. Mit seinen Schlussfolgerungen hatte Seebeck das Residuum bereits ohne zu wollen vorweggenommen.

Auch Hermann (1890) kam zum Schluss, dass im Frequenzspektrum gesungener Vokale der Grundton oft nur sehr schwach vertreten ist, ungeachtet dessen aber immer wahrgenommen wurde. Aus seinen eigenen Experimenten – in Anlehnung an König's Unterbrechungstöne – schloss er, dass das das Ohr dazu fähig ist, periodische Schwankungen der Amplitude als Ton wahrzunehmen. Weitere Untersuchungen in diese Richtung stammten von Pipping, welcher feststellte, dass eine Gruppe von Harmonischen bereits ausreichte, um eine bestimmte Tonhöhe zu generieren. Er führte dieses Phänomen darauf zurück, dass der fehlende Grundton durch die nichtlineare Verarbeitung im Hörorgan wiederhergestellt wurde.

Fletscher (1924) vermochte auf elektronischem Wege nachzuweisen, dass eine beliebige aus dem "komplexen Ton" herausgenommene Reihe dreier aufeinander folgender Obertöne ausreichte, um eine deutliche Grundfrequenz hörbar zu machen. Auch er begründete diesen Sachverhalt mit der Hypothese, dass der fehlende Grundton durch das nichtlineare Übertragungsverhalten des Ohres bestimmt wird.

Widerlegt wurde die Resonanztheorie von Helmholtz durch Békésy (Nobelpreis für Medizin, 1961). Zwar muss auch dessen Wanderwellentheorie aus moderner Sicht als ungenügend angesehen werden. Sie wurde durch eine zelluläre Verstärkertheorie (Cochlear-Amplifier) abgelöst.

In neueren Studien kommt Plomb zum Schluss, dass die eindeutig wahrnehmbare Tonhöhe eines komplexen Tones nicht von der Anwesenheit des Grundtones abhängt, sondern dass dem Gehör vielmehr durch die Periodizität eines Signals die primäre Voraussetzung zur Wahrnehmung des Grundtones gegeben ist.

Gegenüber diesen Vorstellungen gehen die Verfechter des "Pattern Recognition Modells" davon aus, dass es sich beim Residualton in erster Linie nicht um eine aus der Gesamtperiode einer Schwingung abgeleitete Wahrnehmung handelt, sondern um das Produkt eines angelernten Mustererkennungsprozesse. Allerdings versagt dieses Modell zunächst bei der quantitativen Betrachtung der simultanen Repräsentation zweier Residualtöne. Bei der Kombination zweier Residualtöne entsteht nämlich immer ein dritter Residualton, der sich aus der Gesamtperiode der Ausgangstöne ergibt. Liegt dieser resultierende Residualton nicht wesentlich tiefer als die anderen zwei Residualtöne, wird er immer sehr deutlich wahrgenommen.

Offensichtlich ist das "Periodicity pitch Modell" – welches die wahrgenommenen Tonhöhen aufgrund der Periodizität des aus den Obertonreihen resultierenden Signals ableitet – auf den ersten Blick realitätsnaher aufgebaut.

Langer bspw. hat nachgewiesen, dass es bestimmte Klassen von Neuronen in der Hörbahn gibt, die wie eine Korrelationsanalyse arbeiten. Jüngste Untersuchungen im Rahmen des "Korrelationsmodells" befassen sich mit der neuronalen Weiterverarbeitung des vom Hörnerv stammenden Erregungspotentials. Nach Langer (1997) reagieren Neuronen im *Colliculus inferior* häufig auf Signale, die in harmonischer Beziehung zueinander stehen.

11 Hörnern und Pfeifen

11.1 Hörner

In Assyrien wurden für kultische Handlungen zuweilen Schneckenhörner eingesetzt. In China wurde das "Dung Chen" benutzt. Im orthodoxen Judentum wird noch immer das Schofar (ein Widderhorn) verwendet. Dem Alphorn kommt in der Schweiz eine besondere Bedeutung zu. Das traditionelle Didgeridoo der Aborigines ist dagegen kein eigentliches Horn, aber trotzdem ein interessantes Instrument aus der Familie der *Aerophone*.

Beim Hornprofil wird anstelle der klassischen Wellengleichung mit Vorteil die Webster-Gleichung verwendet. Solange sich ein Schalltrichter noch nicht zu weit geöffnet hat, kann man in guter Näherung die Mathematik ebener Wellen anwenden. Mit zunehmender Entfernung vom Wellenzentrum (Fernfeld) bilden sich hingegen sphärische Wellenfronten aus.

Aus akustischer Sicht lässt sich das Horn in drei Teile gliedern: Polsterpfeife zur Anregung, Übertragungskanal (Luftsäule) und Resonator (Schalltrichter). Im Übertragungskanal bilden sich bei Anregung stehende Wellen mit ortsfesten Druckknoten und Druckbäuchen aus. Am Druckbauch oszilliert der Schalldruck als Summe der hin- und rücklaufenden Druckamplituden.

Der Grad der stehenden Wellen im Wellenleiter wird durch das Stehwellenverhältnis (Standing wave ratio) bestimmt:

$$\mathrm{SWR} = (\mathrm{A} + \mathrm{B})/(\mathrm{A} - \mathrm{B})$$

A, B gegenläufige Amplituden

11.1.1 Hornkategorien

Hörner werden in folgende Kategorien unterteilt: Konische, exponentielle und katenoidale Hörner. Namentlich zu erwähnen sind Besselhorn und Salmonhorn, die sich durch ihre Mensur unterscheiden.

Blasinstrumente können durch Aneinanderreihung unterschiedlicher Profile beschrieben werden. Einige Instrumente besitzen über den grössten Teil ihrer Länge eine zylindrische oder konische Bohrung und weiten sich erst am Ende auf wie ein Besselhorn. Die Übertragungsfunktion eines zylindrischen oder auch konischen Rohres kann nach Benade (1988) durch eine Vierpolgleichung beschrieben werden. Eine interessante Kombination von Zylinder, Konus und Horn bieten bspw. Tuba, Waldhorn, Euphonium und Sousaphon.

Ich habe gehört, dass Jazzmusiker gerne auf Trompeten mit einem Besselhorn als Schalltrichter spielen (die deutschen Périnet-Trompeten besitzen eine andere Mensur). Bei den amerikanischen Trompeten ist auch die Bauart und Lage der Ventile eine andere. Nebst den instrumentalen Aspekten sind die Lippenmoden des Spielers von Relevanz. Ich erinnere diesbezüglich an Satchmo!

In der klassischen Musik werden oft gedämpfte Hörner eingesetzt, z.B. bei Mozart (Idomeneo, Marsch Nr. 13), Beethoven (6. Sinfonie) und Carl Maria von Weber (Klarinettenkonzert, Solo der drei Hörner). Zur Dämpfung diente das Stopfen. Heute werden dazu unterschiedlich konstruierte Dämpfer benutzt.

11.2.1 Hornlautsprecher

Hörner kommen auch im Lautsprecherbau vor. Unter dem Horn versteht man den Schallkanal von der Halsöffnung bis zur Mundöffnung (Umgebung). Im Prinzip ist das Horn ein akustischer Impedanzwandler. Das Horn besitzt bei guter Klangwiedergabe und gutem Wirkungsgrad eine nur geringe Verzerrung.Mit der gegen die Mundöffnung zunehmenden Querschnittsfläche erfolgt die Anpassung an die Umgebung. In einigen Musikboxen aus den sechziger Jahren wurde oben ein Exponentialhorn eingesetzt, während unten zwei Basslautsprecher montiert waren.

a) Beim Exponentialhorn (Abb. 11-1) erweitert sich die Querschnittsfläche vom Hals (A_H) bis zum Mund (A_M) nach einer e-Funktion:

$$A_M = A_H \cdot e^{kx}$$

x Trichterlänge

Aufgrund des starken Anstieges der Hornfunktunktion F gegen das Hornende ergibt sich eine hohe Cutoff-Frequenz. Somit können sich im Blaskanal auch stehende Wellen für hohe Frequenzen ausbilden.

b) Das Kugelwellenhorn besitzt die Form einer Traktrix (Schleppkette). Die Kugelwelle entsteht bei der Ablösung der Welle vom Hornmund.

c) Beim konischen Horn findet ein vorzeitiger Abfall der akustischen Impedanz zu tiefen Frequenzen statt.

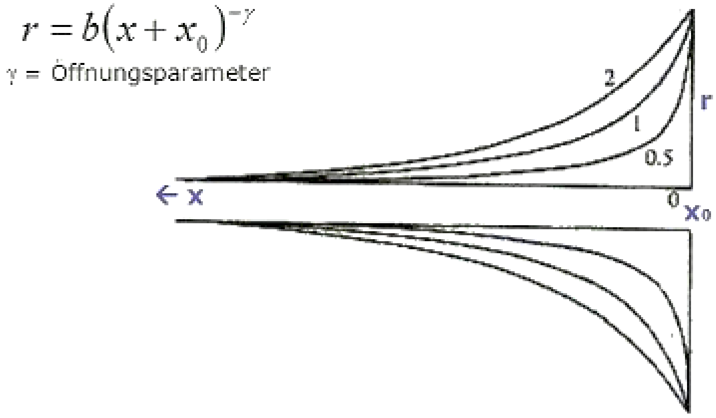


Abb. 11-1
Mensuren von Besselhörnern (bestimmend ist der Oeffnungsparameter)

12 Pfeifen

Auch den Pfeifen soll ein kurzes Kapitel gewidmet werden. Als Signalinstrument oder auch zur Imitation von Tierstimmen wurden Pfeifen bereits in der Steinzeit verwendet. Pfeifen gehören zur Gruppe der Aerophone, wo beim Spiel longitudinal schwingende Luftsäulen entstehen. Angeregt werden Aerophone mit Lippen, Zungen- oder Polsterpfeifen. Klangfarbe und Höhe des erzeugten Tons hängen von der Grösse und Form des Resonanzraumes ab, aber auch von der Schärfe der Schneidekante und von Winkel, Dicke und Stärke des Luftstrahls.

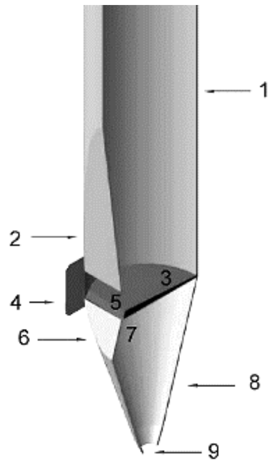
12.1 Pfeifentypen

Es gibt Lippen- als auch Zungenpfeifen.

12.1.1 Labialpfeifen

Die Lippen- oder Labialpfeife (Abb. 12-1) wird an einem offenen Ende durch Luftbewegung angeregt. Das andere Ende kann entweder offen (Blockflöte, Querflöte) oder geschlossen bzw. gedeckt sein (Panflöte).

Die Luft strömt durch den Pfeifenfuss aus der Kernspalte und trifft auf das Oberlabium (Anblaskante); dort wird der Luftstrom abgelenkt und beginnt zu schwingen.



1 - Pfeifenkörper

2 - Oberlabium

3 - Kern

4 - Seitenbart

5 - Aufschnitt

6 - Unterlabium

7 - Kernspalte

8 - Pfeifenfuss

9 - Fussloch

Abb. 12-1
Metallene Labialpfeife (schematisch)

12.1.2 Lingualpfeifen

Die Zungen- oder Lingualpfeife wird durch den Luftstrom der Zunge zu Schwingungen angeregt, so dass sich am Ende der Luftsäule Druckschwankungen ausbilden. Weil diese Pfeife nur ein akustisch offenes Ende besitzt, wird sie auch als "gedeckte Pfeife" bezeichnet. Das Mundstück der Klarinette mit einem Rohrblatt oder dasjenige der Oboe mit doppeltem Rohrblatt sind nichts anderes als gedeckte Pfeifen.

a) Bei der Polsterpfeife werden die menschlichen Lippen in Schwingungen versetzt, um so Druckschwankungen in der Luftsäule zu erzeugen. Die Lippen (Polster) stellen ein gedecktes Ende dar. Das zweite Ende ist immer offen. Das Mundstück sämtlicher Blechblasinstrumente entspricht einer Polsterpfeife.

b) Auch das Didgeridoo (Didjeridu, Abb. 12-2) gehört zur Familie der Aerophone (beruhend auf dem Tonerzeugungsprinzip der Polsterpfeife). Traditionell wird es aus einem von Termiten ausgehöhlten Stamm lokaler Eukalyptusarten gefertigt; aber auch Bambus oder der Stamm des Schraubenbaumes (Pandanus) erweist sich als geeignet.

Abb. 12-2
Didgeridoo[16]

Es handelt sich um ein obertonreiches Instrument, meist zur rhythmisch eingesetzten Begleitung von Gesängen und Tänzen; aber auch Solospieler sind gelegentlich anzutreffen. Als einziges dieser Instrumente wird es auf dem Grundton geblasen. Aus der Traumzeit der Aborigines ist überliefert, dass die vom Didgeridoo erzeugten Töne als Vibrationen der Regenbogenschlange zu interpretieren sind, welche sie erzeugte, als sie – auf ihrem Weg aus

[16] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/86/Didgeridoo_Entier1.jpg

dem Meer kommend – den australischen Kontinent formte. Es gäbe noch viel zu sagen...

12.1.3 Orgelpfeifen

Imposante Pfeifen sind zweifellos Orgelpfeifen (Abb. 12-3; Abb. 12-4), die aus Holz oder Metall gefertigt werden. Um den grossen Tonumfang einer Kirchenorgel abzudecken, sind sehr viele Pfeifen (die Mehrheit Labialpfeifen) nötig. Pfeifen gleicher Klangart werden in Registern zusammengefasst. Das sog. Orgelmetall besteht aus einer weichen Zinn-Blei-Legierung (Probezinn und Naturguss), selten nur aus Blei. Reines Zinn oder Kupfer wird aus repräsentativen Gründen nur für sog. Prospektpfeifen verwendet. Für Holzpfeifen werden Eiche, Nadel- oder Obstholz benutzt.

Vom Klangerzeugungsprinzip lassen sich zwei elementare Typen unterschieden:

a) **Labial-** oder **Lippenpfeifen**. Es gibt offene als auch gedackte (gedeckte) Labialpfeifen.

Für zylindrische Formen bestimmt sich die Länge nach folgenden Faustformeln:

offene Labialpfeife: $l = \frac{1}{2} \cdot (c/f) - k$

gedackte Labialpfeife: $l = \frac{1}{4} \cdot (c/f)$

k Mündungskorrektur, $k \approx (5/3)d$

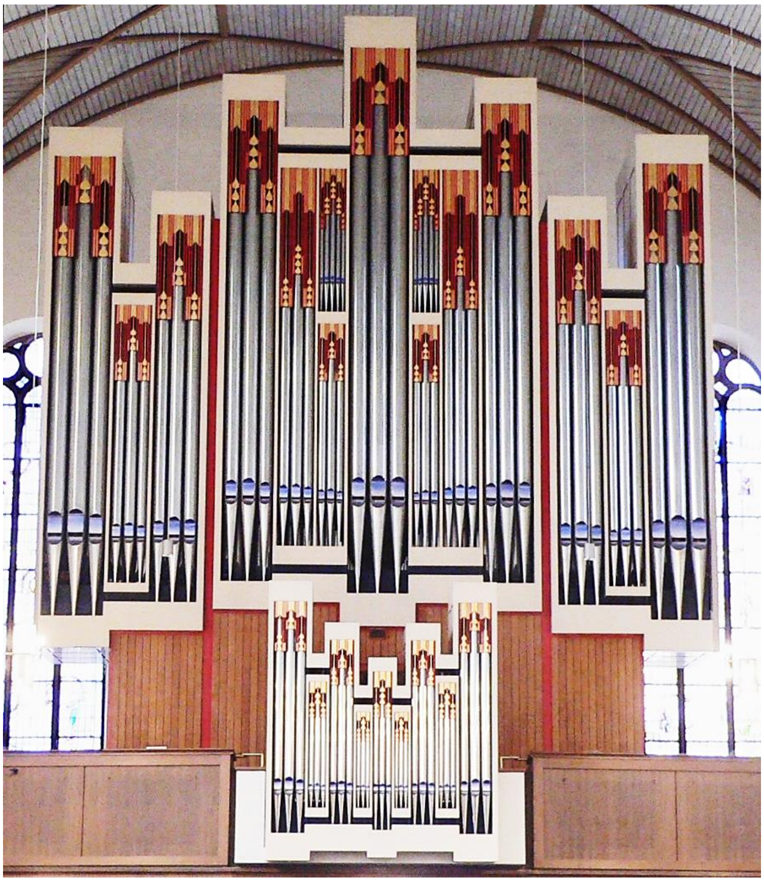


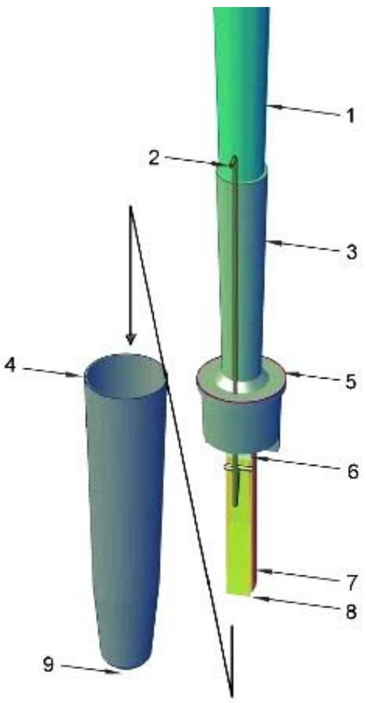
Abb. 12-3
Orgelsprospekt der Frankfurter Katharinenkirche[17]

Abb. 12-4
Labialpfeifen mit Bronzelabien[18]

[17] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/28/Frankfurt_Katharinenkirche_Orgelprospekt_1990.jpg
[18] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/96/Montre_patine_bronze.jpg

Während die Tonhöhe allein durch die Pfeifenlänge bestimmt wird, ist die Klangfarbe weitgehend von der Mensur abhängig. Unter der Mensur versteht man im Kontext nebst der bereits erwähnten Längenmensur die Weitenmensur (als Verhältnis von Durchmesser zur Länge der Pfeife), die Labienbreite (Breite des Labiums im Verhältnis zum Umfang der Pfeife) und die Aufschnitthöhe (Abstand zwischen Ober- und Unterlabium im Verhältnis zur Labienbreite); dazu kommen Kernspaltenweite, Fusslochgröße und weitere Parameter, die dem Orgelbauer bekannt sein müssen.

b) Die zweite Gruppe der Orgelpfeifen sind die **Lingual-** oder **Zungenpfeifen** (Abb. 12-5), bei denen der Luftstrom eine Metallzunge in Schwingungen versetzt. Der Klang wird durch einen Resonanzkörper (Becher) verstärkt. Aus Platzgründen sind nebst geraden auch gekröpfte Lingualpfeifen anzutreffen.



1 - Aufsatz oder Schallbecher

2 - Stimmkrücke

3 - Becherbüchse

4 - Stiefel

5 - Nuss

6 - Keil

7 - Kehle

8 - Zunge

9 - Fussloch

Abb. 12-5
Lingualpfeife deutscher Bauart (schematisch)

Im unteren Teil (Stiefel) ist die Zunge untergebracht. Der obere Teil (Becher) ist als Hohlkörper aus Holz oder Metall geformt und massgebend für Verstärkung und Färbung des Klanges. Im Stiefel – oben durch die sog. Nuss abgedichtet – hängt die Kehle (ein Metallröhrchen, das zum Becherraum geöffnet ist und seitlich einen Schlitz besitzt). Auf dem Schlitz liegt die Zunge auf. Diese ist am oberen Ende durch den Keil festgeklemmt und unten leicht aufgebogen. Klangbestimmend sind bei der Zungenpfeife die Gestalt der Kehle, die Dicke und Breite der Zunge sowie die Form und Mensur des Bechers.

Wer sich selbst am Bau einer Orgelpfeife (etwas handwerkliches Geschick vorausgesetzt) versuchen will, der zögere nicht länger!

13 Sackpfeifen

Zuallerletzt soll die Sackpfeife (Dudelsack) mit ihrem unverwechselbaren Klang angesprochen werden. Möglicherweise stammt dieses Instrument ursprünglich aus Kleinasien oder dem Balkan. Im Mittelalter war die Sackpfeife – nebst Schalmei und Horn – ein beliebtes Musikinstrument der Hirten und Musikanten in ganz Europa.

13.1 Dudelsack

Bekannt sind bspw. die Schäferpfeife, der böhmische Bock und das Hümmelchen. In den skandinavischen Ländern sind Sackpfeifen eigener Prägung üblich, die kleiner und leiser als die schottischen Bagpipes sind. Insbesondere in Schottland ist die "Great Highland Bagpipe" gewissermassen zum Symbol nationaler Identität geworden. In England wird der Dudelsack vorwiegend in der Militärmusik gespielt. Von dort aus verbreitete sich das Spiel bis in die britischen Kolonien. Vielen dürfte auch das leicht melancholisch klingende "Amazing Grace" in guter Erinnerung sein. Mein Onkel spielt dieses Lied übrigens auf der Glasharfe (ein weiteres Musikinstrument von besonderer Beschaffenheit).

Die Spieltechnik des Borduns[19] ist nicht auf Schottland begrenzt, sondern in vielen Teilen Europas verbreitet, darunter in gewissen Gegenden Frankreichs und Galiciens, Süditalien, Böhmen, Ungarn und Bulgarien. Die Musik bewegt sich hauptsächlich in Tonarten mit gleichem tonalen Zentrum, um welches die restlichen Harmonien kreisen. Zwischen den Melodietönen und dem Bordun ensteht ein rhythmisches Wechselspiel von dissonanten Reibungen und konsonantem Wohlklang und damit der besondere, zuweilen schmerzlich-wehklagende Klang. So werden musikalische Spannungen auf und abgebaut.

Abb. 13-1
Dudelsack

Bekannte klassische Vorbilder sind z.B. das Vorspiel zum Wagnerschen "Rheingold" (wo ein Bordun in Es unterlegt wird) oder Mussorgskis Klavierzyklus "Bilder einer Ausstellung" (wo während des gesamten Stücks ein rhythmisierter Bordun mit zahlreichen Quintklängen eine besondere Stimmung erzeugt).

Beim Dudelsack werden letztlich Rohrblätter oder Zungen in Schwingungen versetzt. Zum Melodiespiel gehört die Spielpfeife (Chanter) mit Mundstück (Mouthpiece, Blowpipe) und Doppelrohrblatt (ähnlich der Oboe) sowie sieben Löchern für die Melodielinie. Gedrechselt aus einheimischen Hölzern wie Ahorn, Birnbaum, Buchsbaum, Ebenholz, Grenadill etc. Sackpfeifen mit konisch gebohrter Spielpfeife sind markant lauter als solche mit Zylinderbohrung. Eine ausgeprägt konische Bohrung besitzt die schottische Tenor-Dudelsackpfeife. Dauertöne dagegen werden mit Bordunpfeifen (Brummer) in reinen Quinten und einfachem Rohrblatt (wie

[19] Bordun bezeichnet einen Halteton, der zur Begleitung einer Melodie erklingt. Als Bordun wird zumeist der Grundton der jeweiligen Tonart verwendet oder die reine Quinte zum Grundton (Wikipedia).

bei der Klarinette) erzeugt; darunter zwei kleine Bordunpfeifen (Tenordrone) und eine grosse Bordunpfeife (Bassdrone) mit Aufschlagzungen. Eine Stimmung ist durch Verändern der Pfeifenlänge möglich.

Es bestehen verschiedene Intonationsmöglichkeiten:

> Eine Abwandlung besteht darin, zum Grundton als zweiten Bordunton dessen Unterquarte, also die um eine Oktave nach unten verlegte reine Quinte zum Grundton, erklingen zu lassen (z. B. Hümmelchen, Borduntöne c+f, Melodie auf Grundton F). Auch andere Töne und Kombinationen von Tönen sind als Bordun möglich und in Gebrauch, so die große und kleine Terz (meist zusammen mit Grundton und Quinte), die kleine Septime (meist allein, z. B. Great Highland Bagpipe: Borduntöne A+a+a, Melodie auf H-äolisch) oder die große None (meist zusammen mit der Quinte, z. B. Marktsackpfeife: Borduntöne A+e, Melodie auf Grundton D).
>
> Quelle: Wikipedia

Mit einem Anblasrohr oder über einen Blasbalg (Windmagazin) bläst der Spieler Luft in den Luftsack (Bag). Dieser aus Leder oder einem Synthetikwerkstoff (Corotex) bestehende Sack dient als Druckspeicher. Damit die Luft nicht entweichen kann, ist an geeigneter Stelle ein Rückschlagventil eingebaut. Ist der Sack gefüllt, presst der Spieler durch Armdruck die Luft in die Pfeifen. Dabei strömt die Luft durch eine Windkapsel, in welcher das Rohrblatt frei schwingen kann. Das Rohrblatt besteht meist aus Pfahlrohr (Arundo donax). Ausser in der Sackpfeife werden Windkapseln auch beim Krummhorn und der Sopranschalmei verwendet.

Das einwandfreie Spiel auf der konventionellen Sackpfeife erfordert jahrelange Übung und eine kräftige Lunge dazu. Für den eher schwachen Bläser hat Rolf Jost mit schwäbischem Tüftlergeist einen elektronischen Dudelsack – die Redpipe – gebaut. Aus einem Blutdruckmessgerät baute er die Pumpe aus, im Internet suchte er nach geeigneten Mikroprozessoren. Die gewünschten Töne werden mit einer pneumatischen Steuerung durch Druck auf den Luftsack erzeugt. Von Physik muss der Spieler eigentlich nichts verstehen, vom Instrumentenbau in diesem Fall auch nichts. Gut ist natürlich, wenn einem die Grundlagen in etwa bekannt sind.