BEWEGUNGSGLEICHUNGEN EINES PENDELS

1 Einführung

Die Bewegungsgleichungen gelten für das Federpendel, Fadenpendel und das physikalische Pendel für eine ungedämpfte harmonische Schwingung; dies ist der Fall bei einer hinreichend kleinen Amplitude.

1) Ein Federpendel oder Federschwinger ist ein harmonischer Oszillator, der aus einer Schraubenfeder und einem Massenkörper besteht. Die Oszillation erfolgt als lineare Hin- und Herbewegung. Sofern sich die Masse in Lotrichtung bewegt, beeinflusst die Schwerkraft die Bewegung. Beim Loslassen eines aus seiner Ruhelage ausgelenkten Federschwingers beginnt eine harmonische Schwingung, deren Amplitude bei fehlender Dämpfung konstant ist.

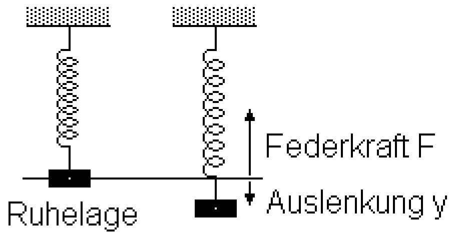


Abb. 1: Auslenkung beim Federpendel[1]

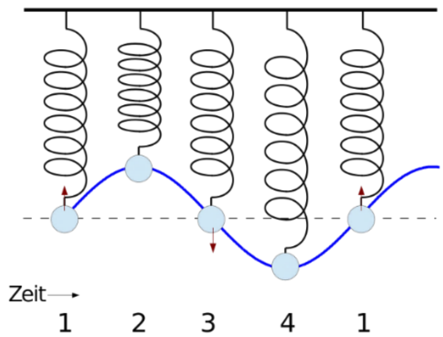


Abb. 2: Zeitlicher Verlauf beim Fadenpendel[2]

2) Ein Fadenpendel besteht aus einem Faden der Länge l, an dem ein Massenkörper befestigt ist. Lenkt man das Fadenpendel aus seiner Ruhelage aus, so beginnt es aufgrund der Schwerkraft zu schwingen.

3) Ein physikalisches Pendel lässt sich durch einen ausgedehnten, starren Körper der Masse m, der nicht in seinem Schwerpunkt befestigt ist, approximieren. Wird dieser Körper aus der Ruhelage ausgelenkt, so beginnt er aufgrund der Schwerkraft zu schwingen

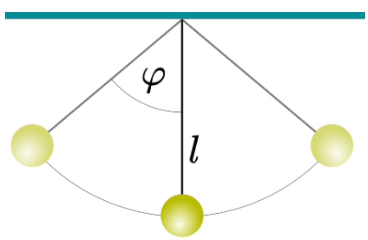


Abb. 3: Fadenpendel[3]

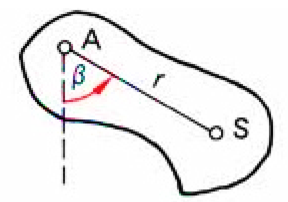


Abb. 4: Physikalisches Pendel[4]

In den Nulldurchgängen erfährt der Pendelkörper keine Beschleunigung, die Geschwindigkeit dagegen ist dort maximal. In den Umkehrpunkten ist die Geschwindigkeit Null, dafür aber die

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Federpendel
[2] https://de.m.wikipedia.org/wiki/
[3] https://www.mint-digital.de/experimente/fadenpendel/
[4] Hering et al.: Physik für Ingenieure (Springer).

Beschleunigung maximal.

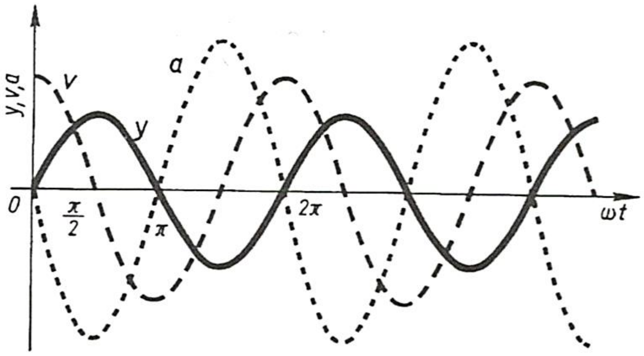


Abb. 5: Auslenkung y, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a einer harmonischen Schwingung[5]

2 Zeigermodell am Beispiel eines Federpendels

Der zeitliche Verlauf einer harmonischen Schwingung kann mittels eines rotierenden Zeigers dargestellt werden.

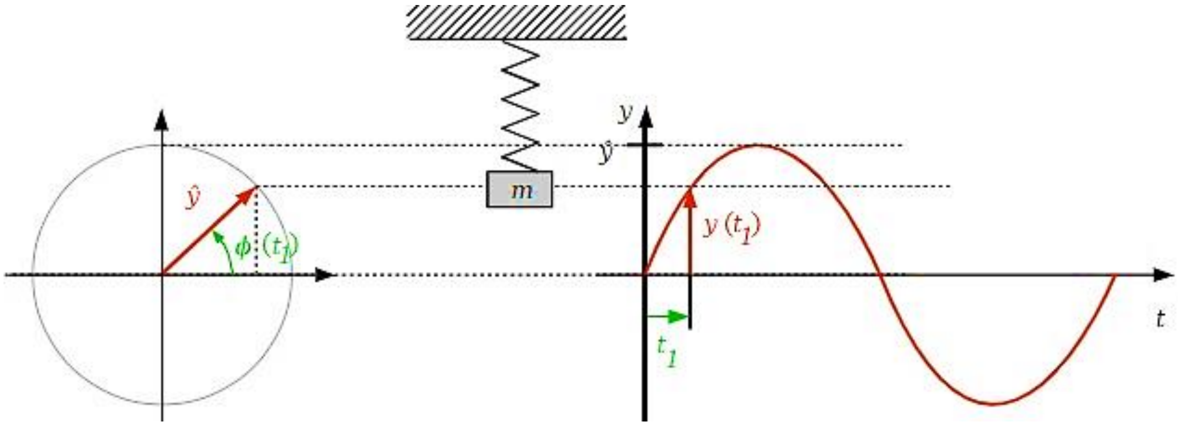


Abb. 6: Zeiger- und Liniendiagramm am Beispiel eines Federpendels[6]

a) Zeigerdiagramm (links).

b) Liniendiagramm (rechts) mit der Momentanauslenkung des Pendels über der Zeit.

Im Beispiel (Abb. 6a) ist der Ausgangspunkt der Bewegung die Ruhelage des Pendels. Der Zeigerumlauf beginnt somit bei $\varphi_0 = 0$. Im y,t-Diagramm (Abb. 6b) beginnt die Schwingung bei t_0 aus der Ruhelage heraus, weshalb auch $y(t_0) = 0$ ist.

a) Als *Elongation* y(t) wir die Auslenkung eines Pendels aus der Ruhelage y(0) bezeichnet. Die maximale Auslenkung y_{max} wird Schwingungsweite resp. *Amplitude* genannt. Bei einer ungedämpften harmonischen Schwingung ist die Amplitude konstant.

b) Als *Kreisfrequenz* oder Winkelgeschwindigkeit ω wird der pro Sekunde vom rotierenden Zeiger überstrichene Winkel bezeichnet. Ein einmaliger Umlauf des Zeigers entspricht einem

[5] Lindner: Physik für Ingenieure (Hanser).
[6] Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Zeigermodell

Winkel φ von 360° = 2 π rad.

c) Die *Periodendauer* T ist die Zeit, welche eine periodische Schwingung für eine Zeigerumdrehung von 360° benötigt.

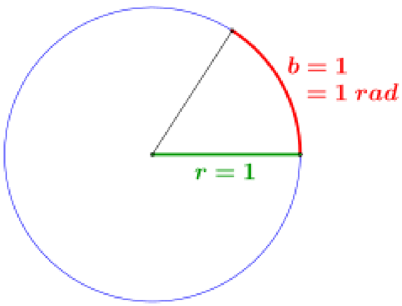
d) Der *Phasenwinkel* φ ist der zu einem bestimmten Zeitpunkt überstrichene Winkel.

Physikalische Grössen und Symbole:

Elongation:	$y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$	y	:=	Elongation od. Auslenkung [m]
Kreisfrequenz:	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	f	:=	Frequenz od. Schwingungszahl [s-1]
Periodendauer:	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	ω	:=	Kreisfrequenz [s-1]
		T	:=	Perioden- od. Schwingungsdauer [s]
Phasenwinkel:	$\varphi = \omega t$	t	:=	Zeit [s]

Anm.: Die Eigenkreisfrequenz ω_0 resp. die Eigenfrequenz $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ ist diejenige Frequenz, mit der das System nach einer Anregung schwingt. Vernachlässigt man die Dämpfung, so ist die Eigenfrequenz gleich der Resonanzfrequenz.

Radiant [rad] ist eine Winkelangabe im Bogenmaß, bei dem der Winkel durch die Länge des entsprechenden Kreisbogens im Einheitskreis angegeben wird. Gleichungen, in denen die Kreisfrequenz (Winkelgeschwindigkeit) vorkommt, werden meist im Bogenmaß duchgeführt. Taschenrechner müssen dazu von DEG (degree) auf RAD umgestellt werden.



$$1\,rad = \frac{360°}{2\pi} \approx 57{,}3°$$

Abb. 7: Winkel im Bogenmaß[7]

3 Bewegungsgesetze

3.1 Ortsfunktion

Mithilfe der Ortsfunktion y(t) lässt sich die Lage (Auslenkung) des Pendels zu einem festgelegten Zeitpunkt t bestimmen.

Eine ungedämpfte harmonische Schwingung kann durch einer Sinusfunktion beschrieben werden.

Auslenkung: $y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$

Die Amplitude oder Schwingungsweite A entspricht der grössten Auslenkung $\hat{y}$ und damit dem Abstand von der Ruhelage (t-Achse) bis zum oberen oder unteren Umkehrpunkt.

[7] https://de.wikipedia.org/wiki/Radiant_(Einheit)

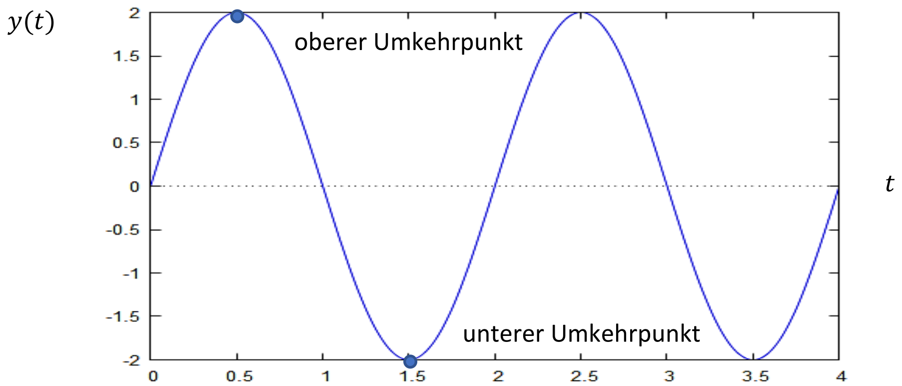


Abb. 8: Ortsfunktion (Sinus) einer harmonischen Schwingung

3.2 Geschwindigkeitsfunktion

Mithilfe der Geschwindigkeitsfunktion v(t) kann die Geschwindigkeit des Pendels zu einem beliebigen Zeitpunkt t angegeben werden.

Die Geschwindigkeit entspricht der ersten Ableitung des Ortes nach der Zeit.

Geschwindigkeit: $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos \omega t \quad ; \quad v_{max} = A \cdot \omega$

Weil es sich dabei um die erste Ableitung einer Sinusfunktion handelt, resultiert daraus eine Kosinusfunktion.

Anm.: Ein Punkt über einem Funktionssymbol bedeutet seit Isaac Newton, dass es sich um die erste Ableitung einer Funktion nach der Zeit handelt. Zwei Punkte bedeuten zwei hintereinander durchgeführte Ableitungen nach t usw.

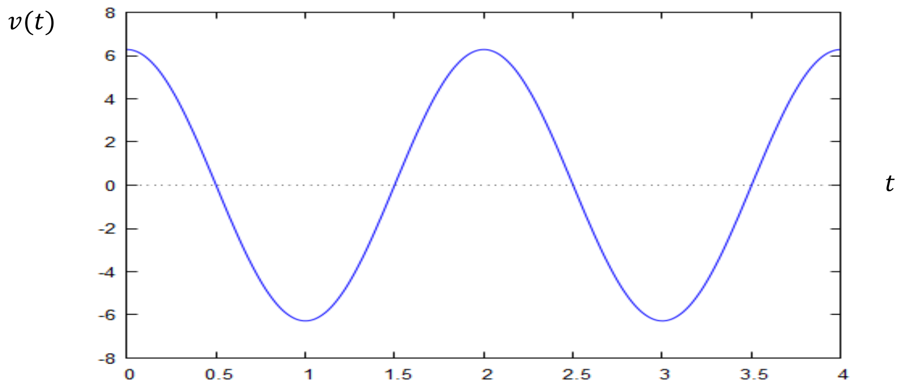


Abb. 9: Geschwindigkeitsfunktion (Kosinus) einer harmonischen Schwingung

3.3 Beschleunigungsfunktion

Mithilfe der Beschleunigungsfunktion a(t) kann die Beschleunigung des Pendels zu einem bestimmten Zeitpunkt t angegeben werden.

Die Beschleunigung entspricht der ersten Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.

Beschleunigung: $\dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \quad ; \quad a_{max} = A \cdot \omega^2$

Weil es sich dabei um die erste Ableitung einer Kosinusfunktion resp. die zweite Ableitung einer Sinusfunktion handelt, resultiert daraus eine inverse Sinusfunktion.

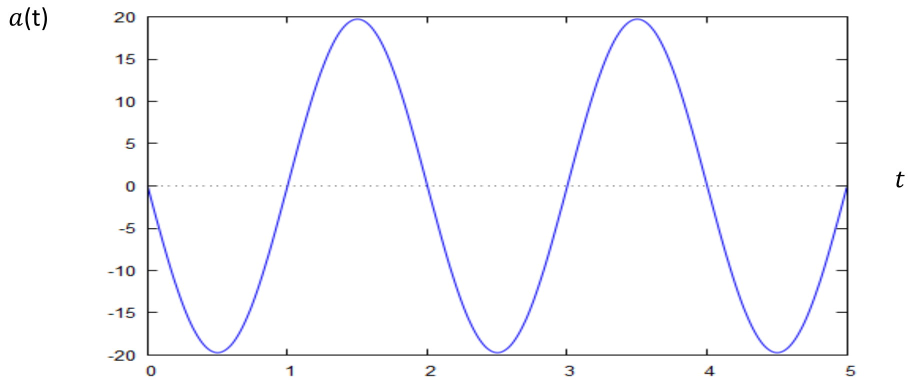


Abb. 10: Beschleunigungsfunktion (Sinus invers) einer harmonischen Schwingung

4 Lehrbeispiele

In den nachfolgenden Lehrbeispielen werden Gesetzmässigkeiten für ungedämpfte harmonische Schwingungen aufgezeigt.

Anm.: Damit richtige Ergebnisse entstehen, muss der Taschenrechner auf RAD (Radiant) eingestellt werden. Ist dies nicht möglich, so muss der Phasenwinkel $\varphi = \omega t$ in Bogengrade umgerechnet werden.

Beispiel: Der Winkel betrage 3π rad. Wie gross ist der Winkel in Altgrad?

$$\varphi_{DEG} = \frac{360°}{2\pi} \cdot 3\pi = 360° \cdot 1{,}5 = 540°$$

4.1 Beispiel 1

Ein Körper führt eine ungedämpfte harmonische Schwingung aus. Gegeben ist eine Bewegungsgleichung, in der Grössen zusammen mit den Einheiten vorkommen.

$$y(t) = 2dm \cdot \sin\left(\pi s^{-1} \cdot t\right)$$

dm := Dezimeter (1 dm = 1/10 m)
s := Sekunde

Bestimme:

a) Eigenkreisfrequenz, b) Schwingungsdauer und c) Amplitude der Schwingung.

Wir berücksichtigen die fundamentale Bewegungsgleichung $y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ und kennen somit den Aufbau der gegebenen Gleichung.

Zu 1a: Weil $\omega = 2\pi f$ und $f = 1/T$ berechnet sich die Eigenkreisfrequenz wie folgt:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,s} = \pi s^{-1} \approx \frac{3{,}14}{s}$$

Zu 1b: Die Periodendauer kann dem Plot in Abb. 11 entnommen werden und beträgt 2 s.

Zu 1c: Die Amplitude ist in der Bewegungsgleichung mit einem Wert von 2 dm eingetragen.

4.2 Beispiel 2

Gegeben sei die Bewegungsgleichung aus dem ersten Lehrbeispiel.

Wie gross ist zum Zeitpunkt t = 3,5 Sekunden:

a) die momentane Auslenkung, b) die momentane Geschwindigkeit und c) die momentane Beschleunigung?

Zu 2a) Wir bestimmen die Auslenkung bei t = 3,5 s.

$$y(3{,}5s) = 2dm \cdot \sin(\pi s^{-1} \cdot 3{,}5s) = -2\ dm$$

Die errechnete Auslenkung entspricht der maximalen Auslenkung und somit der Schwingungsweite. Aufgrund des negativen Vorzeichens des Ergebnisses befindet sich der Pendelkörper zum besagten Zeitpunkt am unteren Umkehrpunkt (roter Punkt in Abb. 11).

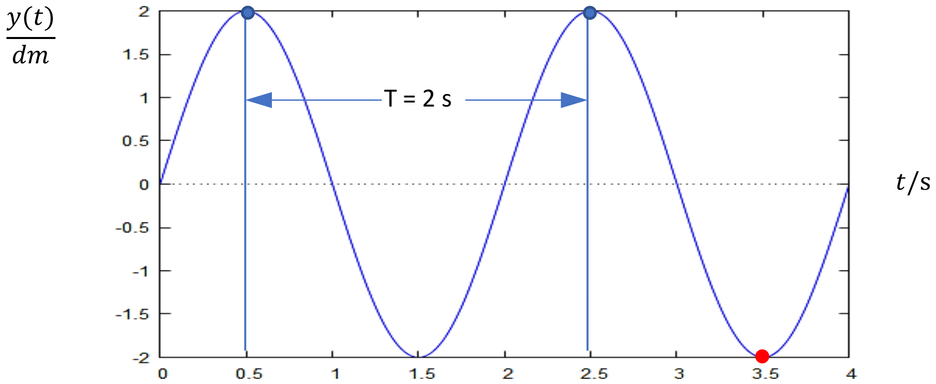


Abb. 11: Auslenkung bei t = 3,5 s

Zu 2b) Wir bestimmen die Geschwindigkeit bei t = 3,5 s.

$$v(3{,}5s) = 2dm \cdot \pi s^{-1} \cdot \cos(\pi s^{-1} \cdot 3{,}5s) = \frac{0\ dm}{s}$$

Die errechnete Geschwindigkeit ist Null (roter Punkt in Abb. 12). Dies bedeutet, dass sich der Körper zum besagten Zeitpunkt an einem Umkehrpunkt befindet.

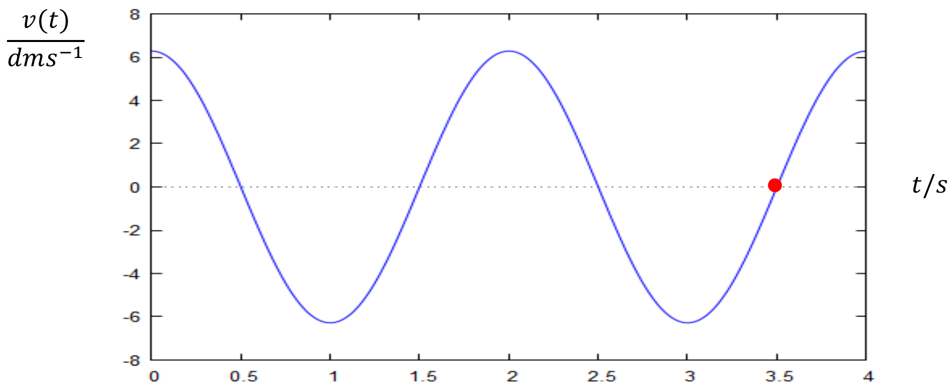


Abb. 12: Geschwindigkeit bei t = 3,5 s

Die Geschwindigkeit ist beim Durchlaufen der Ruhelage am Grössten und nimmt bei Annäherung an die Umkehrpunkte kontinuierlich ab.

Zu 2c) Wir bestimmen die Beschleunigung bei t = 3,5 s.

$$a(3{,}5s) = -d2m \cdot (\pi s^{-1})^2 \cdot sin(\pi s^{-1} \cdot 3{,}5s) = \frac{19{,}74\ dm}{s^2}$$

Die errechnete Beschleunigung ist der maximalen Beschleunigung gleich. Somit befindet sich der Pendelkörper an einem Umkehrpunkt. Aufgrund des positiven Vorzeichens des Ergebnisses muss es sich um den oberen Umkehrpunkt (roter Punkt in Abb. 13) handeln.

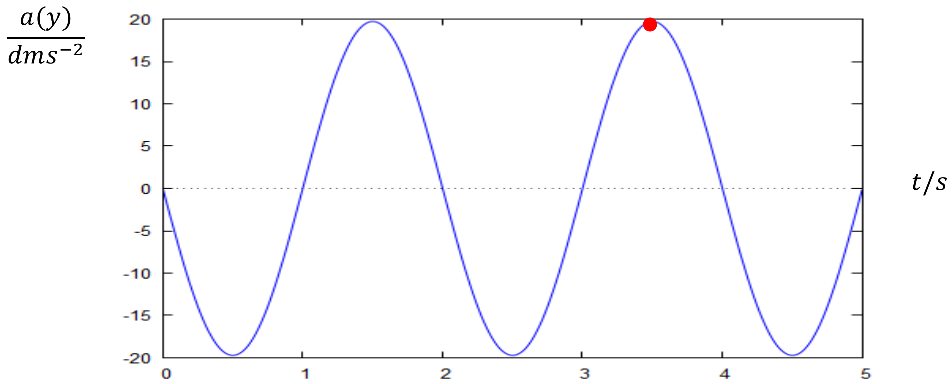


Abb. 13: Beschleunigung bei t = 3,5 s

Die Beschleunigung ist in der Ruhelage immer Null und an den Umkehrpunkten am Größten.

4.3 Beispiel 3

Die Amplitude einer ungedämpften Schwingung beträgt 15 cm, die Periodendauer 6 s.

Wie groß sind:

a) Maximalgeschwindigkeit und b) Maximalbeschleunigung der Schwingung?

Die Maximalgeschwindigkeit errechnet sich mit $v_{max} = A \cdot \omega$.

Die Maximalbeschleungiung errechnet sich mit $a_{max} = A \cdot \omega^2$.

Ausser der Amplitude müssen wir folglich auch die Kreisfrequenz kennen.

Kreisfrequenz ω und Periodendauer T stehen zueinander in folgendem Zusammenhang:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Damit lässt sich die Kreisfrequenz errechnen.

$$\omega = \frac{2\pi}{6s} = 1{,}0472\ s^{-1}$$

Zu 3a) Die Maximalgeschwindigkeit beträgt:

$$v_{max} = 0{,}15m \cdot 1{,}0472 s^{-1} = 0{,}1571 \frac{m}{s}$$

Zu 3b) Multiplizieren wir v_{max} mit ω, so erhalten wir die Maximalbeschleunigung:

$$a_{max} = 0{,}1571 m s^{-1} \cdot 1{,}0472 s^{-1} = 0{,}1645 \frac{m}{s^2}$$

5 Quellenverweise

5.1 Fachliteratur

Helmut Lindner: Physik für Ingenieure (Hanser)

Dieter Meschede (Hrsg.): Gerthsen Physik (Springer Spektrum)

David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker: Halliday Physik (Wiley-VCH)

Ekbert Hering, Rolf Martin, Martin Stohrer: Physik für Ingenieure (Springer)

5.2 Weblinks

5.2.1 Lehrstoff

https://studyflix.de/ingenieurwissenschaften/

https://www.ingenieurkurse.de/physik/

5.2.2 Tools

https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/

https://www.ableitungsrechner.net/