

# Eine kurze Geschichte der Elektrodynamik

$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	Gaußsches Gesetz der Elektrostatik
$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	Gaußsches Gesetz der Magnetostatik
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Induktionsgesetz
$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Ampersches Gesetz mit Maxwellscher Erweiterung

Ludwig Boltzmann äusserte seine Hochachtung vor Maxwells Leistung – den Vierzeiler aus Goethes Faust variierend – mit pathetischen Worten:

War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb,  
Die mit geheimnisvoll verborg'nen Trieb  
Die Kräfte der Natur um mich enthüllen  
Und mir das Herz mit stiller Freud erfüllen.<sup>1</sup>

## Einleitung

Einstein (1931) nannte James C. Maxwells Gesamtwerk "das Tiefste und Fruchtbare, das die Physik seit Newton entdeckt hat". Damit wird insbesondere die Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes – die Elektrodynamik – in den Brennpunkt unserer Betrachtungen gerückt.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts waren die meisten Naturwissenschaftler der Ansicht, dass sich elektrische und magnetische Felder instantan im Raum ausbreiten. Wie bei der Gravitation gingen die Naturforscher von einer Fernwirkungstheorie aus, eine Überzeugung, die sich besonders prägnant im Coulomb'schen Gesetz der Elektrostatik widerspiegelte, das formal dem Newtonschen Gravitationsgesetz aufs Haar glich. Schliesslich konnten Weber und Kohlrausch im Experiment zeigen, dass sich diese Felder mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreiten, deren Betrag in der Grössenordnung der Lichtgeschwindigkeit lag. Aber erst Maxwell gelang die Ausarbeitung einer in sich konsistenten Theorie des elektromagnetischen Feldes, die als Nahwirkungstheorie formuliert war. Es dauerte allerdings seine Zeit, bis sich diese neuartige Lehre auf dem Europäischen Kontinent durchzusetzen vermochte. Den Sachverhalt komplizierend kam hinzu, dass die Webersche Elektrodynamik von anderen Prämissen ausging und selbst einem ausgewiesenen Physiker wie Helmholtz die Entscheidung schwerfiel. Die raschen Erfolge der gegen Ende des 19. Jahrhunderts aufkommenden Nachrichtentechnik bezeugten aber die Richtigkeit der Maxwellschen Elektrodynamik.

---

<sup>1</sup> Ludwig Boltzmann: Geleitwort zur *Vorlesung über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichts* (1893).

# 1 Das Induktionsgesetz

Bis zu Ørsted's während einer Vorlesung im Jahre 1820 erfolgter Entdeckung der Ablenkung einer Kompassnadel im Nahbereich eines stromdurchflossenen Drahtes waren die meisten Physiker der Meinung gewesen, dass es sich bei den elektrischen und magnetischen Feldern um zwei völlig unterschiedliche Phänomene handelte. Nun aber kristallisierte sich schrittweise heraus, dass es sich um zwei unterschiedliche Aspekte desselben Phänomens handeln musste. Die dazu erforderlichen Untersuchungen wurden von einem begnadeten Autodidakten, dem einstigen Buchbinder und nun als Experimentator an der "Royal Institution" tätigen Michael Faraday (1791-1867) ausgeführt. Zunächst als persönlicher Assistent im Schatten von Humphry Davy stehend, entwickelte Faraday innerhalb weniger Jahre die für elektrodynamische Prozesse wegweisenden Experimente.

Davy, bis 1812 Professor für Chemie an der "Royal Institution" in London und später Präsident der "Royal Society", war als Sohn eines Holzschnitzers bei einem Arzt und Apotheker in die Lehre gegangen und hatte sich dann als Autodidakt und Entdecker der Elemente Kalium, Natrium und Chlor eine hohe Reputation erworben. Sein mit gewissen Parallelen zu Faradays Lebensweg markierter Werdegang erklärt möglicherweise die entgegengebrachte Sympathie für den Buchbindergesellen. Dazu kamen besondere Umstände, die es Faraday ermöglichten, als Laborgehilfe für Davy zu arbeiten.

Die bedeutendsten seiner Publikationen zum Elektromagnetismus fasste Faraday in seinen *Experimental Researches in Electricity* zusammen. 1833 wurde Faraday zum ersten Fuller-Professor für Chemie ernannt. Privat verkehrte der stets bescheiden auftretende Forscher in den Kreisen der Sandemanianer, einer christlichen Splittergruppe, welche an die Autorität des biblischen Wortes glaubten.

Im Jahr 1831 entdeckte Faraday in seinem Labor, dass eine stromdurchflossene Drahtspule beim Ein- und Ausschalten in einer benachbarten zweiten Spule eine elektrische Spannung induzierte, welche bei geschlossenem Stromkreis einen Strom zur Folge hatte, den man aufgrund seiner Wirkung auf eine Magnetenadel nachweisen konnte (später benutzte man dafür ein Galvanometer). Beide Spulen befanden sich auf den Polflächen eines Weicheisenringes.

$$u = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Ursache dieses für die Wissenschaft neuartigen Effektes war die Änderung des magnetischen Flusses in der von einer Leiterschleife aufgespannten Fläche. Das **Induktionsgesetz** war geboren.

Unabhängig von Faraday entdeckte auch Joseph Henry (1797-1878) die elektromagnetische Induktion. Aus diesem Grunde ist in der Literatur gelegentlich vom *Faraday-Henri-Gesetz* die Rede. Weitere Versuche zeigten, dass auch in einer geschlossenen Drahtschleife, in welche ein Stabmagnet eingeführt wird, ein Stromfluss hervorgerufen wird. Dieselbe Wirkung zeigte ein zeitlich veränderliches Magnetfeld, das die Drahtschleife durchflutete. Das Induktionsgesetz sollte sich als wegweisend für den Bau von elektrischen Maschinen und Transformatoren erweisen.

## 2 Faradays Kraftlinien

Aus dem Physikunterricht ist bekannt, dass sich magnetische Feldlinien "sichtbar" machen lassen, indem eine über einem Magneten befindliche Kartonunterlage mit Eisenfeilspänen bestreut wird. Faraday bezeichnete diese Spuren als *Line of Force*. Später sollte sich der schottische Gelehrte James C. Maxwell auf Faradays Kraftlinien berufen. In seiner "Treatise" schrieb Maxwell:

Faraday sah im Geiste die den ganzen Raum durchdringenden Kraftlinien, wo die Mathematiker fernwirkende Kraftzentren sahen...<sup>2</sup>

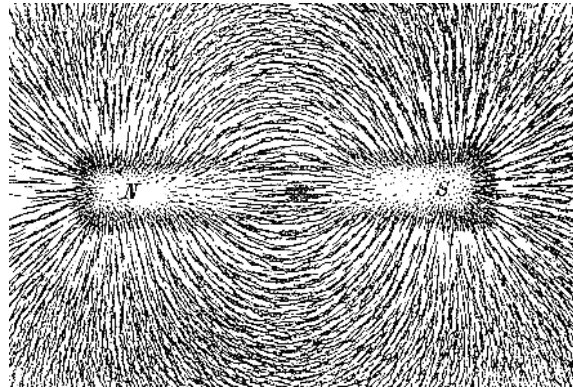


Abb. 2-1

Feldlinienbild eines Stabmagneten (Wikipedia)

Vergeblich versuchte Faraday in seinen letzten Lebensjahren, einen Zusammenhang zwischen dem Elektromagnetismus und der Gravitation zu finden. Prinzipiell war er auf der richtigen Spur (wie z.B. die Existenz der Torsionsfelder belegt); aber die Zeit war dafür noch nicht reif genug.

## 3 Ein Mathematiker tritt auf den Plan

Während Faraday sich als intuitiver Experimentator betätigt hatte, erwies sich James C. Maxwell (1831-1879) als ebenso begnadeter Theoretiker. Als mathematisch geschulter Naturforscher zollte Maxwell dem Lebenswerk seines Vorgängers grosse Achtung, als er schrieb:

Faraday ist der Vater der erweiterten Lehre des Elektromagnetismus, und wird dies immer bleiben.<sup>3</sup>

Maxwell hatte es sich zur Aufgabe gemacht, die ohne mathematischen Formalismus auskommenden Beschreibungen der Faradayschen Experimente in eine mathematisch stringente Form zu überführen. Sein erster grösserer Artikel zu diesem Thema *On Faraday's Lines of Force* erschien 1856. In einer Artikelreihe *On Physical Lines of Force*<sup>4</sup> beschrieb Maxwell in den folgenden Jahren das Medium, das der Übertragung der elektromagnetischen Kräfte dienen sollte. Dieses besass seit Young und Fresnel elastische Eigenschaften und war allge-

<sup>2</sup> J.C. Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Clarendon Press, 1873).

<sup>3</sup> Ebd.: *Scientific Worthies I. – Faraday* (Nature, Band 8, 1873).

<sup>4</sup> Ebd.: *On Physical Lines of Force* (Philosophical Magazine, 1861-62).

mein als "Lichtäther" bekannt. In einem mechanischen Analogiemodell versuchte Maxwell den für ihn in Frage kommenden Übertragungsmechanismus zu begründen. Weitere Arbeiten folgten. 1865 erschien *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*.<sup>5</sup> Seine Ergebnisse fasste Maxwell schliesslich in einem zweibändigen Werk mit dem Titel *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873) zusammen.

Maxwells grösste Leistung bestand zweifellos in der Einführung des sog. *Verschiebungsstromes* (Displacement current), der das Ampersche Gesetz mit einem Zusatzglied erweiterte und so die Vorgänge im Dielektrikum und Vakuum adäquat beschrieb. Aufbauend auf den Gesetzen von Gauß, Faraday und Ampere entstand sukzessive die Maxwellsche Elektrodynamik, welche die drahtlose Nachrichtentechnik erst ermöglichte. Der Kulminationspunkt dieser Entwicklung gipfelte in der elektromagnetischen Feldtheorie bzw. der fundamentalen Erkenntnis, dass elektromagnetische Wellen und Licht sich lediglich durch ihre Frequenz unterscheiden. Als makroskopische Feldtheorie erwies sich die Maxwellsche Elektrodynamik selbst im Rahmen der später entwickelten Relativitätstheorie als lorentzinvariant. Erst die diskreten Wechselwirkungen zwischen Licht und Materie erforderten weiterführende Beschreibungen, die zur Quantenelektrodynamik (und später zur Theorie der elektroschwachen Vereinigung) führten.

## 4 Die Maxwellschen Gleichungen

### 4.1 Quaternionen

In seinem Aufsatz *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* (1865) benutzte Maxwell  $4 \times 3$  Differentialgleichungen, zu denen  $2 \times 3$  Materialgleichungen und 2 skalare Differentialgleichungen hinzukommen. Partielle Ableitungen wurden mit geraden  $d$ 's geschrieben (anstelle des heute gebräuchlichen  $\partial/\partial t$ ).

In der zweibändigen Buchausgabe *A Treatise on Electricity and Magnetism* (1873) kamen Quaternionen hinzu, die William R. Hamilton (1805-1865) dreissig Jahre zuvor in die Mathematik eingeführt hatte. In der "Treatise" finden sich zwanzig solcher Quaternionen-Gleichungen. Ein Vorteil dieser Notation war, dass sich ausser Vektoren auch skalare Grössen unterbringen liessen.

$$x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$$

Für den anwendungsorientierten Ingenieur erwies sich diese Schreibweise aber als unnötig kompliziert, so dass später davon Abstand genommen wurde.<sup>6</sup> Heute benutzt man Quaternionen u.a. in der Computergrafik, um räumliche Drehungen zu beschreiben.

1892 wurden die Maxwell-Hertzchen-Feldgleichungen durch den Telegrafisten und Elektrotechniker Oliver Heaviside (1850-1925) in Vektornotation niedergeschrieben. Als Autodidakt benötigte Heaviside lange, um sich in die höhere Mathematik einzuarbeiten. Von ihm stammt das dreiteilige Werk *Electromagnetic Theory*. Band III erschien erst 1912. Im Alter

<sup>5</sup> Ebd.: (Philosophical Transactions of the Royal Society, 1865).

<sup>6</sup> Gerhard W. Bruhn: *Die Maxwell-Gleichungen – vom Original zur modernen Schreibweise* (Skript).  
André Waser: *Zur Schreibweise der Feldgleichungen der Elektrodynamik* (Skript).

entwickelte sich Heaviside – vermutlich durch eine Schwerhörigkeit bedingt – zum ausgesprochenen Sonderling.

Unabhängig von Heaviside schuf Josiah Willard Gibbs (1839-1903) die eigentliche Vektoranalysis.<sup>7</sup> Damit liessen sich die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes erheblich vereinfachen, so dass anstelle der  $4 \times 3$  Differentialgleichungen und  $2 \times 3$  Materialgleichungen nur noch  $4 + 2$  Gleichungen erforderlich sind. Die ursprünglich zwanzig Gleichungen wurden damit auf deren vier resp. sechs reduziert, wie aus den Vorlesungen zur Elektrodynamik zur Genüge bekannt ist. In modernen Lehrbüchern finden sich die aus der Vektoranalysis bekannten Operatoren grad, div und rot, die zu einer übersichtlicheren Schreibweise der Maxwell'schen Gleichungen beitrugen.<sup>8</sup>

## 4.2 Die fundamentalen Gleichungen in vektorieller Schreibweise

Infolge unterschiedlicher Einheitensysteme<sup>9</sup> bestehen Abweichungen in der Schreibweise physikalischer Gleichungen. Bei der Aufzählung der Maxwell'schen Gleichungen wird – je nach Lehrbuch und Autor – die Nummerierung manchmal vertauscht und die vierte Feldgleichung als erste bezeichnet usw.

Es werden folgende Einheiten verwendet:

E = elektrische Feldstärke	D = elektrische Flussdichte
H = magnetische Feldstärke	B = magnetische Flussdichte
j = Leitungsstrom	$\frac{d}{dt}D$ = Verschiebungsstrom

In SI-Einheiten werden die Maxwell'schen Feldgleichungen in differentieller Form wie folgt geschrieben:

### ► Erste Maxwell'sche Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik}$$

Die Raumladungsdichte ist die Ursache eines elektrischen Quellenfeldes.

### ► Zweite Maxwell'sche Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{Gauß'sches Gesetz der Magnetostatik}$$

Nach Maxwell existiert keine Ursache für ein magnetisches Quellenfeld. Aus diesem Grunde gibt es in der elektromagnetischen Feldtheorie bis heute keine magnetischen Monopole.

### ► Dritte Maxwell'sche Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

Die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.

<sup>7</sup> J. Willard Gibbs: *Elements of Vector Analysis* (1884).

<sup>8</sup> Gottlieb Strassacker, Roland Süsse: *Rotation, Divergenz und Gradient* (Teubner).

<sup>9</sup> Einige Autoren von Lehrbüchern der Elektrodynamik benutzen noch immer das Gauß'sche Maßsystem; andere verwenden das Internationale Einheitensystem.

Diese Gesetzmässigkeit wird z.B. im *Betatron* mittels der sog. Ringspannung angewandt.

#### ► Vierte Maxwellsche Gleichung

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{Ampersches Gesetz mit Maxwellscher Erweiterung}$$

Die Gesamtstromdichte (Leitungs- und Verschiebungsstromdichte) erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld.

### 4.3 Erweiterungen

Zur vollständigen Beschreibung elektrodynamischer Vorgänge im Vakuum und in Materie werden weitere Gleichungen benötigt, die nachfolgend in Kürze aufgeführt sind.

#### ► Materialgleichungen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H} + \mathbf{J}(\mathbf{H})$$

P elektrische Polarisation ; J magnetische Polarisation

#### ► Ohmsches Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

$\sigma$  spezifische Leitfähigkeit

#### ► Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

q Ladung ; v Relativgeschwindigkeit

#### ► Poyntingvektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Der Poynting-Vektor zeigt in Richtung des Energieflusses.

#### ► Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$\Delta$  Laplaceoperator ;  $\Delta \equiv \nabla^2$

#### ► Vektorpotential

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

A magnetisches Vektorpotential ;  $\varphi$  skaleres Potential

Unter Mathematikern ist die physikalische Bedeutung des Vektorpotentials umstritten. Beim *Bohm-Aharonov-Effekt* bspw. übt es eine wichtige Funktion aus, deren Interpretation unterschiedliche Schlussfolgerungen zulässt.

#### 4.4 Der elektromagnetische Feldstärke-Tensor

Für eine besonders kompakte Schreibweise elektromagnetischer Größen lassen sich die elementaren Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  im sog. *Faraday-Tensor* zusammenfassen. Zum Verständnis der mathematischen Zusammenhänge sind Kenntnisse der Tensorrechnung erforderlich (wie sie z.B. in den Fachbüchern von Iben und Schroeder vermittelt werden).<sup>10</sup>

Der elektromagnetische Feldstärketensor ist gewöhnlich definiert durch das Vektorpotential.

$$A^\mu = \left( \frac{\Phi}{c}, \vec{A} \right)$$

Daraus folgt:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

In einer flachen Raumzeit (Minkowski-Metrik) und kartesischen Koordinaten kann der Feldstärketensor wie folgt geschrieben werden:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

**Abb. 4-1**

Elektromagnetischer Feldstärketensor in kontravarianter Schreibweise

Der Vorteil von Tensoren liegt u.a. darin, dass sie beim Wechsel des Bezugssystems erhalten bleiben. Lediglich ihre Komponenten verändern sich. Seine Krönung hat der Tensorkalkül in Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie bekommen.

---

<sup>10</sup> Hans Karl Iben: Tensorrechnung (Teubner).  
Dieter Schroeder: Vektor- und Tensorpraxis (Verlag Harri Deutsch).