

1 Felder

1.1 Einleitung

Felder spielen in der Physik eine unverzichtbare Rolle. Genannt seien Strömungsmechanik, Elektrodynamik oder die Relativitätstheorie. Der Feldbegriff geht auf Michael Faraday (1791-1867) zurück, der den Raum um eine stromdurchflossene Luftspule von magnetischen Feldlinien (Lines of Force) durchflutet sah. Vergleichbares trifft für den räumlichen Bereich zwischen den Platten eines geladenen Kondensators zu, der von elektrischen Feldlinien durchdrungen wird.¹

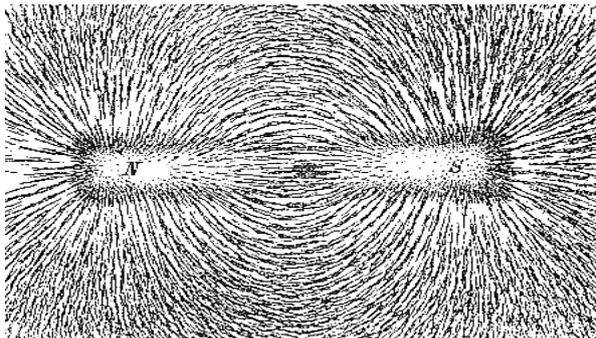


Abb. 1: Feldlinienbild eines Stabmagneten²

Feldlinien dienen der Veranschaulichung ansonsten abstrakter Vorgänge. Eisenfeilspäne beim Magneten und Grieskörner beim Kondensator zeigen durch ihre Anordnung entlang der Feldlinien deren Verlauf an.

Während Faraday sich als genialer Experimentator erzeigte und auf intuitive Weise zum Induktionsgesetz gelangte, erwies sich der schottische Gelehrte James C. Maxwell (1831-1879) als ebenso begnadeter Theoretiker.

Maxwell hatte es sich zur Aufgabe gemacht, die ohne tieferen mathematischen Formalismus auskommenden Beschreibungen der Faradayschen Experimente in eine mathematisch stringente Form zu überführen. Sein erster grösserer Artikel zu diesem Thema *On Faraday's Lines of Force* erschien 1856. In einer Artikelreihe *On Physical Lines of Force*³ beschrieb Maxwell in den folgenden Jahren das Medium, das der Übertragung der elektromagnetischen Kräfte dienen sollte. Dieses hypothetische Medium besass seit Young und Fresnel elastische Eigenschaften und war allgemein als "Lichtäther" (Luminiferous aether) bekannt. In einem mechanischen Analogiemodell versuchte Maxwell den in Frage kommenden Übertragungsmechanismus zu begründen.

Weitere Arbeiten folgten, 1865 erschien *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*.⁴ Seine Ergebnisse fasste Maxwell schliesslich in einem zweibändigen Werk mit dem Titel *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873) zusammen.

¹ Die bedeutendsten seiner Publikationen zum Elektromagnetismus fasste Faraday in seinen *Experimental Researches in Electricity* zusammen. 1833 wurde Faraday zum ersten Fuller-Professor für Chemie ernannt. Privat verkehrte der stets bescheiden auftretende Forscher in den Kreisen der Sandemanianer, einer christlichen Splittergruppe, welche an die Autorität des biblischen Wortes glaubten.

² Bildquelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Magnet>

³ James C. Maxwell: *On Physical Lines of Force* (Philosophical Magazine, 1862).

⁴ Ebenda: *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* (Philosophical Transactions of the Royal Society, 1865).

In der "Treatise" (1873) berief sich Maxwell mit den folgenden Worten auf Faradays Kraftlinien:

Faraday sah im Geiste die den ganzen Raum durchdringenden Kraftlinien, wo die Mathematiker fernwirkende Kraftzentren sahen...⁵

Als mathematisch geschulter Naturforscher zollte Maxwell dem Lebenswerk seines Vorgängers grosse Achtung:

Faraday ist der Vater der erweiterten Lehre des Elektromagnetismus, und wird dies immer bleiben.⁶

1.2 Skalarfelder

Skalare Grössen wie bspw. Temperatur (T), Druck (p) oder Dichte (ρ) werden durch einen Zahlenwert ohne Richtungsangabe dargestellt. Werden in einem bestimmten Raumgebiet Temperaturmessungen durchgeführt, so bilden die lokalisierten Temperaturen (Messwerte) ein räumliches Skalarfeld $T(x, y, z)$.

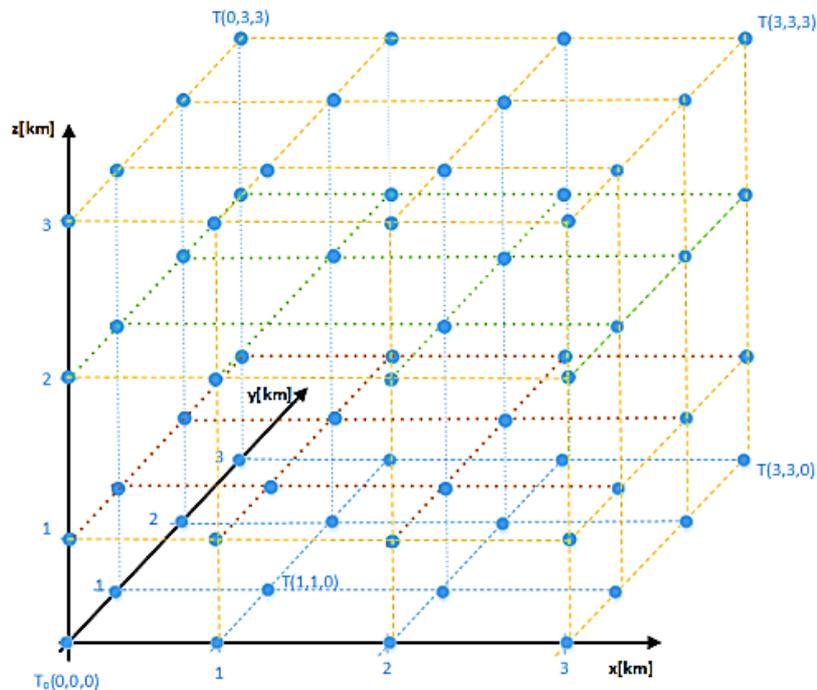


Abb. 2: Räumliche Temperaturverteilung als skalarfeld⁷

In zwei Dimensionen entsteht eine Temperaturverteilungskarte. In ähnlicher Form werden in der Meteorologie Karten mit der Verteilung des Luftdrucks erstellt.

Ein in Kosmologie und Teilchenphysik benötigtes komplexwertiges Skalarfeld ist das Higgsfeld, durch das Teilchen t . Standardmodell ihre Masse erhalten. Weitere kosmologische Felder sind das Inflatonfeld und die Quintessenz, welche als ein zeitlich veränderliches Skalarfeld Ursache der "dunklen Energie" ist.

⁵ James C. Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism (Clarendon Press, 1873).

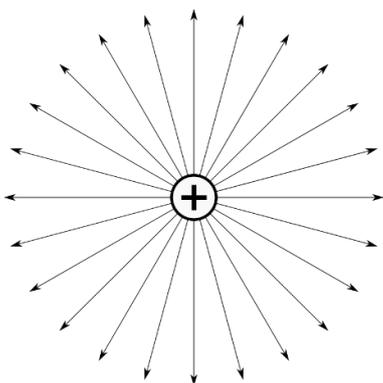
⁶ Scientific Worthies I. – Faraday (Nature, Band 8, 1873).

⁷ Bildquelle: <https://iwer.info/article/Mathematisches/Skalarfeld/index.html>

1.3 Vektorfelder

Vektorielle Größen wie bspw. Kraft (\vec{F}), Geschwindigkeit (\vec{v}) oder die elektrische Feldstärke (\vec{E}) werden durch Betrag und Richtung beschrieben. Geometrisch lassen sich vektorielle Größen mit Richtungspfeilen darstellen, deren Betrag durch ihre Länge ausgedrückt wird. Vektoren (Pfeile) können auf einfache Weise addiert und subtrahiert werden. Davon wird in der Elektrotechnik desöfteren Gebrauch gemacht.

a) elektrisches Feld einer positiven Ladung⁸



b) Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe⁹

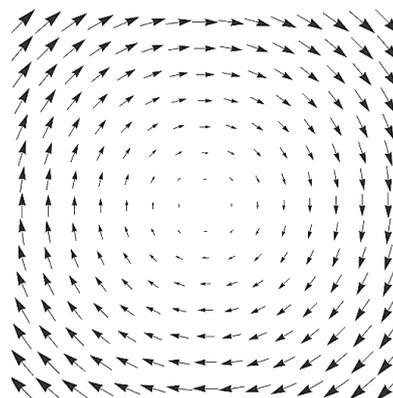


Abb. 3: Beispiele von ebenen Vektorfeldern

1) Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld. Die Feldstärke kann mit einem geeigneten Gerät gemessen werden. Auf geladene Teilchen im Feld wirkt die Coulombkraft. Ist die Ladung bekannt, lässt sich die Kraft bestimmen.

$$\vec{F}_C = q \cdot \vec{E}$$

E elektrische Feldstärke in V/m
q elektrische Ladung in Coulomb [1 C = 1 As]

Geladene Teilchen, die einem elektrischen Feld ausgesetzt sind, werden entlang der Feldlinien beschleunigt.

2) Auch das magnetische Feld ist ein Vektorfeld. Im Unterschied zu elektrostatischen Feldern gibt es beim Magnetismus keine Quellen und Senken. Das magnetische Feld um einen stromdurchflossenen Leiter ist daher immer ein Wirbelfeld mit geschlossenen Feldlinien.

Auf geladene Teilchen, die sich in einem magnetischen Feld bewegen, wirkt die Lorentzkraft.

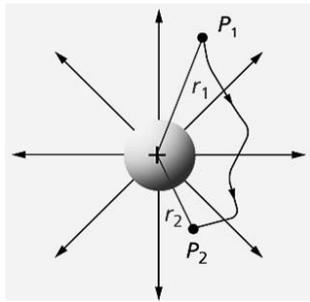
$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

B magnetische Flussdichte in Tesla [1 T = 1 Vs/m²]
v Relativgeschwindigkeit zwischen Feld und Ladungsträger in m/s

Geladene Teilchen, die sich quer zu den Feldlinien bewegen, werden nach der "rechte-Hand-Regel" abgelenkt. Beim Zyklotron bspw. wird von dieser Gesetzmässigkeit Gebrauch gemacht. Bei einer Längsbewegung im Magnetfeld resultiert eine spiralförmige Bahn entlang der Feldlinien. Im Van-Allen-Gürtel bewegen sich Protonen und Elektronen auf spiralenden Bahnen von Pol zu Pol.

⁸ Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fsches_Gesetz

⁹ Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Rotation_eines_Vektorfeldes



$$U_{1,2} = \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

$$U = - \int_{P_1}^{P_2} E ds = \frac{W}{q}$$

U elektrische Spannung in V

W elektrische Energie in Js

Abb. 6: Elektrische Spannung¹²

2.1.2 Orte gleichen Potentials

Niveaulinien bzw. Niveaulächen sind Orte mit demselben Potential. In einer Höhenlandschaft sind es Orte mit derselben Höhe über Meer. In der Elektrostatik ist meist von Äquipotentiallinien oder Äquipotentialflächen die Rede.

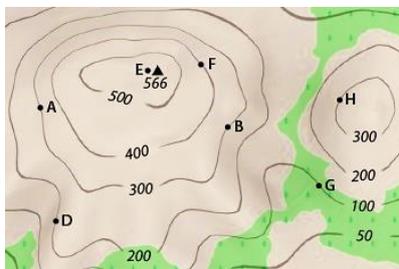


Abb. 7: Höhenlinien auf einer Karte¹³

Höhenlinien stehen immer senkrecht auf den Lot- resp. Falllinien.

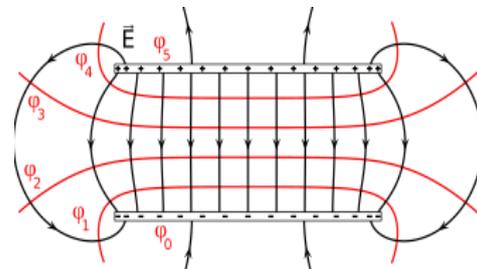


Abb. 8: Elektrisches Feld eines Kondensators¹⁴

Die Äquipotentiallinien sind rot eingezeichnet.

Die folgende Abbildung zeigt Teile einer "Elektronenlinse" für eine sw-Bildröhre. Die Äquipotentiallinien schneiden die elektrischen Feldlinien (nicht eingezeichnet) im rechten Winkel.

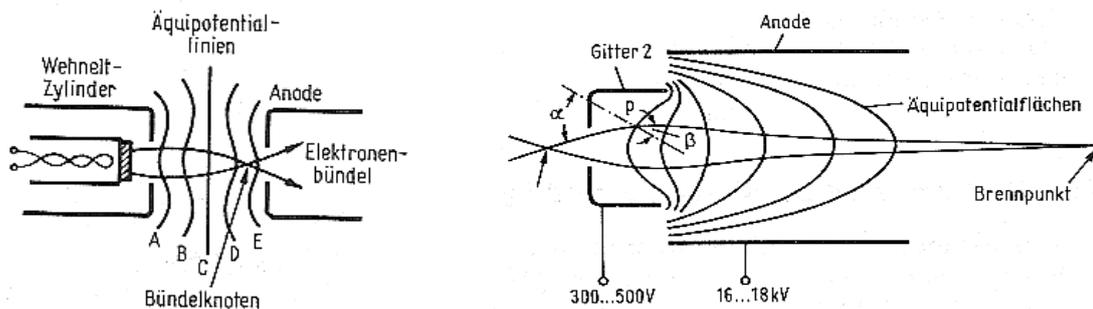


Abb. 9: Schnitt durch eine Bildröhre mit Einzeichnung der Äquipotentiallinien¹⁵

Ein aus dem Wehneltzylinder hervorkommender Elektronenstrahl wird durch die elektrisch-

¹² Bildquelle: <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/artikel/elektrisches-potenzial-und-elektrische-spannung>

¹³ Bildquelle: https://www.gida.de/testcenter/geographie/geo-dvd012/aufgabe_09.htm

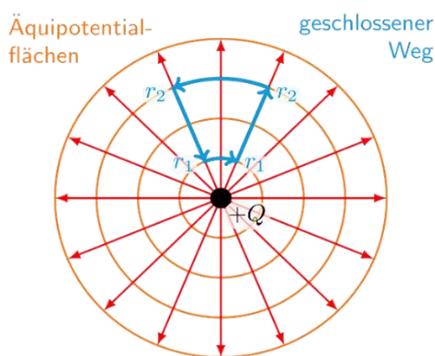
¹⁴ Bildquelle: https://de.wikibooks.org/wiki/Physik_Oberstufe/_Elektrizit%C3%A4tslehre/_Das_elektrische_Feld

¹⁵ Bildquelle: Limann, Pelka: Fernsehtechnik ohne Ballast (Franzis).

en Felder einer Fokussiereinrichtung derart gebündelt, dass auf der Leuchtschicht der Bildröhre ein Brennpunkt entsteht. Beeinflusst durch die magnetischen Felder von Ablenkspulen wandert der Strahl zeilenweise von oben nach unten, um so den im Videosignal enthaltenen Bildinhalt sichtbar zu machen. Pro Sekunde werden 50 Halbbilder übertragen. Für eine Bildröhre mit 625 Zeilen resultiert eine Zeilenfrequenz von 15'625 Hz, die bei intaktem Gehör als hoher Pfeifton wahrgenommen wird.

2.1.3 Konservative Felder

Das elektrische Feld gehört wie auch das Gravitationsfeld zu den konservativen Feldern. Solche Felder zeichnen sich dadurch aus, dass die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges im Feld immer Null sein muss.



Die Arbeit entlang jeder beliebigen geschlossenen Kurve (C) im elektrischen Feld ist gleich Null.

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

Abb. 10: Geschlossener Weg im Radialfeld einer Punktladung¹⁶

2.2 Coulombsches Gesetz

Gleichartige Ladungen stoßen sich ab, ungleichartige ziehen sich an.

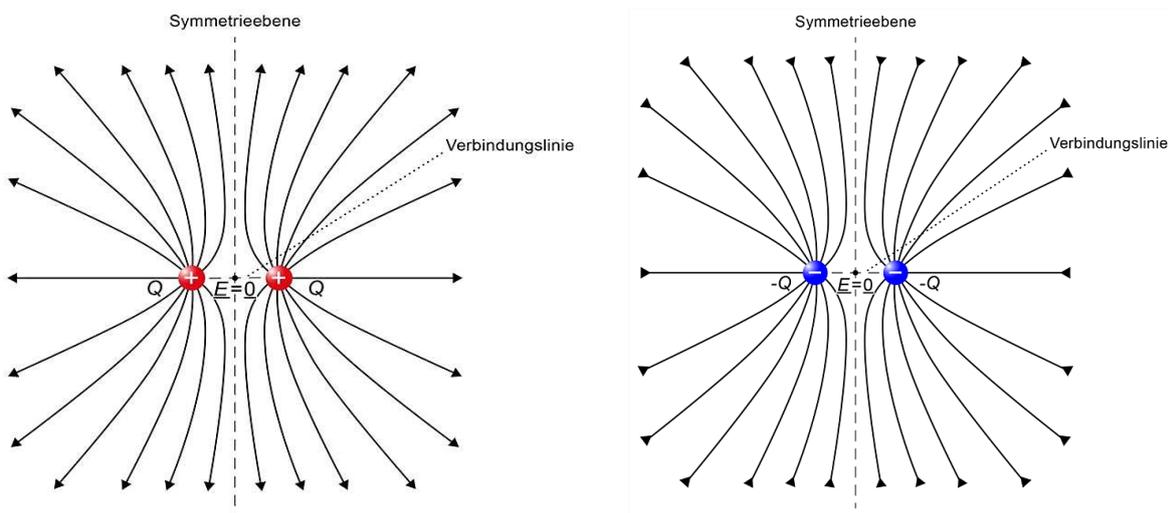


Abb. 11: Feldlinienbild zwischen gleichnamigen und sich abstoßenden Ladungen¹⁷

¹⁶ Bildquelle: <https://lx3.mint-kolleg.kit.edu/onlinekursphysik/html/1.5.1/xcontent2.html>

¹⁷ Bildquelle: <https://www.eit.hs-karlsruhe.de/hertz/teil-a-felder/das-elektrische-feld/elektrostatische-felder/elektrische-feldstaerke.html>

Für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung gilt das Kraftgesetz von Coulomb.

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Der Proportionalitätsfaktor k ist vom verwendeten Maßsystem abhängig.

System International	CGS (nach Gauß)	Heaviside-Lorentz
$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$	$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$	$F = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$
F Kraft in N		
q Ladung in Coulomb [1 C = As]		
r Abstand zwischen zwei Ladungen		
ϵ_0 elektrische Feldkonstante [8,8541878128 · 10 ⁻¹² As/Vm]		

Anm.: In dieser Arbeit wird das Internationale Einheitensystem (SI) benutzt. Nach wie vor findet sich in der Elektromagnetik auch das Gaußsche Maßsystem (CGS-System). In der Elektrodynamik und in der Teilchenphysik ist ferner das Heaviside-Lorentz-Einheitensystem (HLE) verbreitet.

Die folgende Grafik veranschaulicht den Feldverlauf zwischen zwei ungleichnamigen Ladungen. Die Feldlinien gehen von positiven Ladungen (Quellen) aus und enden in negativen Ladungen (Senken). Die Ladungen ziehen sich nach dem Gesetz von Coulomb an.

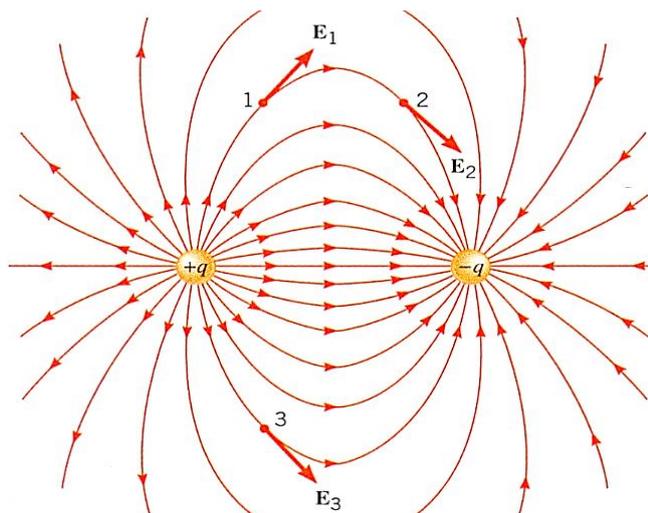


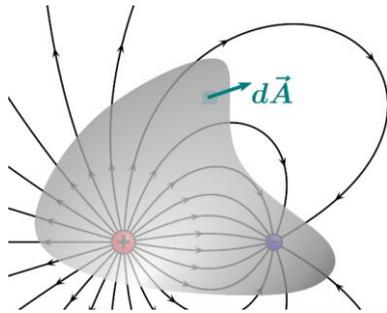
Abb. 12: Elektrisches Dipolfeld zwischen zwei ungleichnamigen Ladungen¹⁸

Jedem Raumpunkt $P(x, y, z)$ kann ein Vektor der elektrischen Feldstärke zugeordnet werden. Die Feldvektoren liegen tangential an den Feldlinien. Verbindet man die zugehörigen Punkte, so entsteht das bekannte Feldlinienbild.

2.3 Gaußsches Gesetz

Das *Gaußsche Gesetz* drückt aus, dass elektrische Ladungen die Quellen eines elektrischen Feldes sind. Ein bestimmter Raumbereich (Sphäre) sei von einer geschlossenen und beliebig geformten Fläche (auch Gaußsche Fläche genannt) umgeben. Die von einer im Innern der Sphäre vorhandenen Ladung ausgehenden Feldlinien durchstossen die Randfläche.

¹⁸ Bildquelle: Skript "Physik für E-Techniker" (FH Aachen).



$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \qquad \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Q	elektr. Ladung in Coulomb [1 C = 1 As]
$D = \epsilon_0 \cdot E$	elektr. Flussdichte in As/m ²
E	elektr. Feldstärke in V/m
dA	infinitesimales Flächenelement
ϵ_0	elektr. Feldkonstante ¹⁹

Die Ergiebigkeit (Quellenstärke) ist eine integrale Aussage, die durch das Hüllenintegral gegeben ist. Daraus lässt sich entnehmen, ob es in einem endlichen Volumen einen Überschuss der Quellen über die Senken (oder umgekehrt) gibt und wie gross er ist. Ist der ausströmende Fluss grösser, als der einströmende, so existiert im Innern eine Quelle (positive Ladung). Ist der ausströmende Fluss kleiner als der einströmende, so ist eine Senke (negative Ladung) vorhanden. Sind einströmende und auströmende Flüsse gleich gross, ist keine messbare Ladung vorhanden und der resultierende Fluss daher gleich Null. Der Gesamtfluss ist folglich nur von der eingeschlossenen Ladung abhängig.

Anm.: Die Definition des elektrischen Flusses ϕ in der elektromagnetischen Feldtheorie unterscheidet sich von der Begriffsfestlegung des elektrischen Flusses Ψ in der Elektrotechnik.

Elektrische Fluss in der Elektrotechnik:

Elektrischer Fluss in der Feldtheorie:

$$\Psi = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \sum_i q_i$$

$$\phi = \frac{\Psi}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

2.4 Induktionsgesetz

Bis zu Ørsted's während einer Vorlesung im Jahre 1820 erfolgter Entdeckung, dass sich eine Kompassnadel im Nahbereich eines stromdurchflossenen Drahtes aus ihrer Ruhelage ablenken lässt, waren die meisten Physiker der Meinung gewesen, dass es sich bei den elektrischen und magnetischen Feldern um zwei völlig unterschiedliche Phänomene handelte. Nun aber kristallisierte sich schrittweise heraus, dass es sich um zwei unterschiedliche Aspekte desselben Phänomens handeln musste.

Ein Grossteil der zur weiteren Erforschung des Elektromagnetismus erforderlichen Versuche wurde von einem begnadeten Autodidakten, dem einstigen Buchbinder und nun als Experimentator an der "Royal Institution" in London tätigen Michael Faraday ausgeführt. Zunächst als persönlicher Assistent im Schatten von Humphry Davy²⁰ stehend, entwickelte Faraday

¹⁹ $\epsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12}$ As/Vm

²⁰ Davy, bis 1812 Professor für Chemie an der "Royal Institution" und später Präsident der "Royal Society", war als Sohn eines Holzschnitzers bei einem Arzt und Apotheker in die Lehre gegangen und hatte sich als Autodidakt und Entdecker der Elemente Kalium, Natrium und Chlor eine hohe Reputation erworben. Sein mit gewissen Parallelen zu Faradays Lebensweg markierter Werdegang erklärt möglicherweise die offenkundige Sympathie für den Buchbindergesellen. Dazu kamen besondere Umstände, die es Faraday ermöglichten, als Laborgehilfe für Davy zu arbeiten.

innerhalb weniger Jahre die für elektrodynamische Prozesse wegweisenden Experimente.

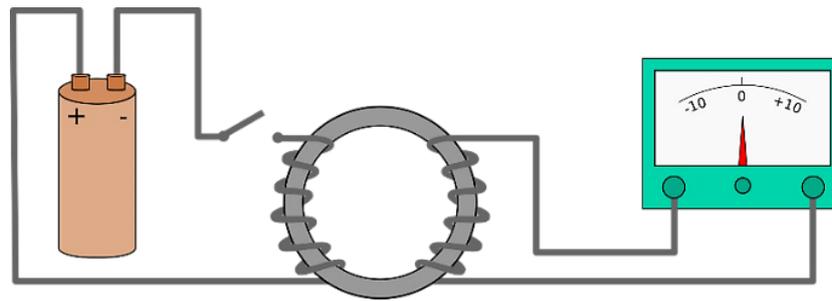


Abb. 13: Prinzip der elektromagnetischen Induktion²¹

Im Jahr 1831 entdeckte Faraday in seinem Labor, dass eine stromdurchflossene Drahtspule beim Ein- und Ausschalten in einer benachbarten zweiten Spule eine elektrische Spannung induzierte, welche bei geschlossenem Stromkreis einen Strom zur Folge hatte, den man aufgrund seiner Wirkung auf eine Magnetnadel nachweisen konnte (später benutzte man dafür ein Galvanometer). Beide Spulen befanden sich auf den Polflächen eines Weicheisenrings.

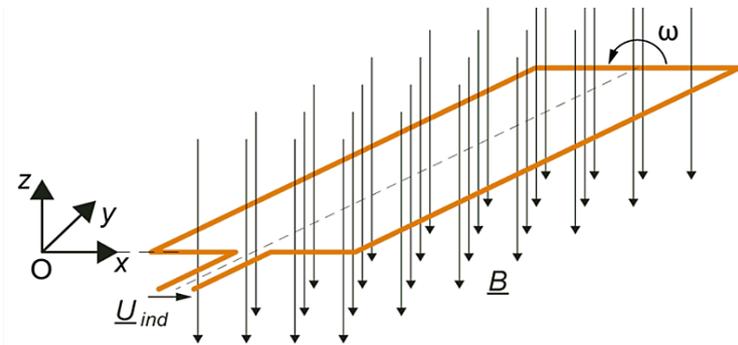


Abb. 14: Bewegungsinduktion²²

Derselbe Effekt wird beobachtet, wenn sich eine Leiterschleife in einem inhomogenen Magnetfeld bewegt. In beiden Fällen ist die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses die Ursache der induzierten Spannung.

$U_{ind} = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$	U_{ind}	Induktionsspannung in V
	$\Delta\phi$	Änderung des magnetischen Flusses in Vs
	Δt	Zeitintervall in s

In integraler Notation lautet das Induktionsgesetz:

$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$	E	elektrische Feldstärke in V/m
	B	magnetische Flussdichte in Tesla [1 T = 1 Vs/m ²]
	ds	infinitesimales Wegelement in m
	dA	infinitesimales Flächenelement in m ²

Das Minuszeichen in der Formel ist auf die *Lenzsche Regel* zurückzuführen, die besagt, dass die Wirkung der Ursache stets entgegengerichtet ist.

²¹ Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Induktion

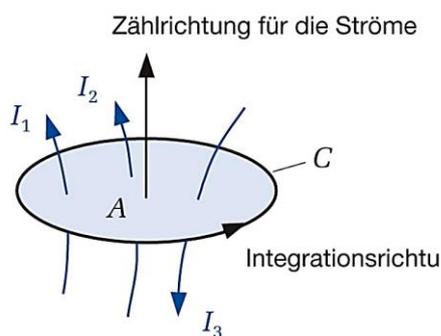
²² Bildquelle: <https://www.eit.hs-karlsruhe.de/hertz/teil-a-felder/das-magnetische-feld/elektromagnetische-felder/induktionsgesetz.html>

Unabhängig von Faraday entdeckte auch Joseph Henry (1797-1878) die elektromagnetische Induktion. Aus diesem Grunde ist in der Literatur gelegentlich vom *Faraday-Henri-Gesetz* die Rede. Weitere Versuche zeigten, dass auch in einer geschlossenen Drahtschleife, in welche ein Stabmagnet eingeführt wird, ein Stromfluss hervorgerufen wird. Dieselbe Wirkung zeigte ein zeitlich veränderliches Magnetfeld, das die Drahtschleife durchflutete. Das Induktionsgesetz sollte sich als wegweisend für den Bau von rotierenden elektrischen Maschinen und Transformatoren erweisen.

Vergeblich versuchte Faraday in seinen letzten Lebensjahren, einen Zusammenhang zwischen Elektromagnetismus und Gravitation zu finden. Prinzipiell war er auf der richtigen Spur (wie die Existenz der Torsionsfelder resp. die Gravitodynamik²³ belegt); aber die Zeit war dafür noch nicht reif genug. Was selbst heute noch nicht ist, wird aber bald einmal kommen.

2.5 Durchflutungsgesetz

Das *Durchflutungsgesetz* (auch Ampèresches Gesetz genannt) besagt, dass elektrische Ströme magnetische Wirbelfelder hervorrufen, deren Stärke im Wesentlichen durch die Stromstärke gegeben ist.



Die Summe der Ströme $\sum_k I_k$, die eine umrandete Fläche durchstossen, nennt man *Durchflutung*.

In integraler Notation lautet das Durchflutungsgesetz:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot \sum_k I_k$$

$B = \mu_0 \cdot H$	magnetische Flussdichte in Tesla [1 T = 1 Vs/m ²]
H	magnetische Feldstärke in A/m
bzw. ds	infinitesimales Wegelement
I	Leitungsstrom in Ampère [A]
μ_0	magnetische Feldkonstante ²⁴

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_k I_k$$

²³ Werner Traupe: Gravitodynamik (BoD).

²⁴ $\mu_0 = 1,25663706212 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$

3 Gradient, Divergenz und Rotation

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ besitzt in Elektrodynamik und Vektoranalysis drei grundsätzliche Anwendungen als Gradient, Divergenz und Rotation.

3.1 Skalarmultiplikation und Gradient

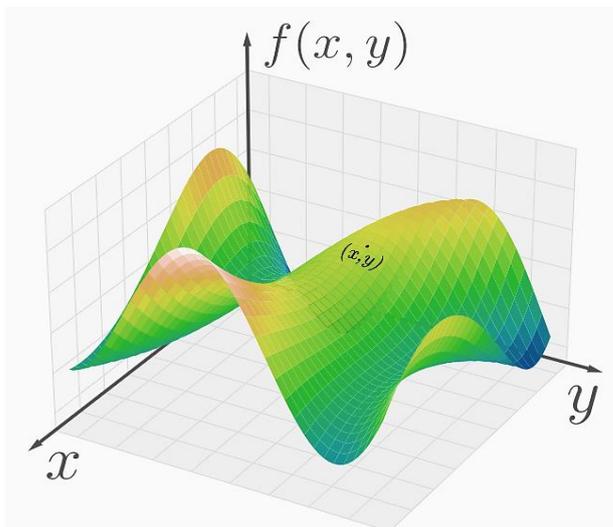
Gegeben sei ein räumliches Skalarfeld $\phi = \phi(x, y, z)$. Als Gradient *grad* ϕ einer skalaren Ortsfunktion wird die Veränderung einer Funktion entlang ihrer Koordinaten bezeichnet.

Der Gradient eines Skalarfeldes erzeugt ein Vektorfeld.

$$\text{grad } f = \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \\ \partial \phi / \partial z \end{pmatrix}$$

Die Wirkung von $\vec{\nabla}$ auf die skalare Funktion ϕ wird als *Gradient* bezeichnet.

Der Gradient steht immer senkrecht auf den Äquipotentiallinien und zeigt stets in Richtung des grössten Zuwachses von ϕ . Die entgegengesetzte Richtung gilt als Potentialgefälle.



Das Gradientenfeld des elektrischen Potentials $\phi(x, y, z)$ bildet die räumliche Feldstärkeverteilung ab.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi$$

Abb. 15: Gradientenfeld einer skalaren Funktion²⁵

3.2 Skalares Produkt und Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$ ist definiert als Skalarprodukt (inneres Produkt) zwischen Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ und Vektorfeld \vec{F} .

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Die Wirkung von $\vec{\nabla}$ auf die vektorielle Funktion \vec{F} wird als *Divergenz* bezeichnet; die Ableitungen erfolgen komponentenweise.

Die Divergenz eines Vektorfeldes erzeugt ein Skalarfeld, das als Fluss- oder Quellendichte bezeichnet wird und ein differentielles Maß für die Stärke des elektrischen Feldes ist.

Die erste Maxwellgleichung beschreibt die Ladungsdichte als Quelle des elektrischen Feldes.

²⁵ <https://de.universaldenker.org/lektionen/212>

$div D = \rho$ Die Divergenz ergibt ein Maß für die Quellen und Senken eines Feldes.
 Quelle des elektrischen Feldes ist die Ladungsdichte.

Elektrische Feldlinien gehen per definitionem von positiven Ladungen aus und enden in negativen Ladungen. In den Raumbereichen, in denen die Divergenz von Null verschieden ist, kommen Quellen oder Senken eines Vektorfeldes vor.

In der Elektrostatik sind Feldquellen Sitz positiver Ladungen, während Senken negative Ladungen enthalten. In einem homogenen elektrischen Feld verschwindet die Divergenz.

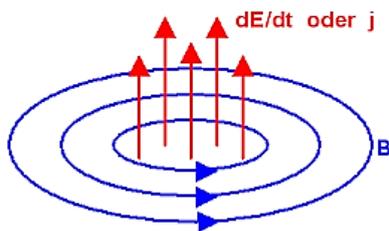
3.3 Kreuzprodukt und Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{F}(r)$ ist definiert als Kreuzprodukt (äusseres Produkt) zwischen Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ und Vektorfeld \vec{F} .

$$rot \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die Wirkung von $\vec{\nabla}$ auf die vektorielle Funktion \vec{F} wird als *Rotation* bezeichnet.

Die Rotation eines Vektorfeldes erzeugt ein anderes Vektorfeld, das als Wirbeldichte (vorticity) bezeichnet wird und ein differentielles Maß für die Stärke des Wirbelfeldes ist. In den Raumbereichen, in denen die Rotation von Null verschieden ist, liegen die Ursachen des generierten Wirbelfeldes. So ist bspw. die Stromdichte \vec{j} die Ursache eines magnetischen Wirbelfeldes \vec{B} , dessen Feldlinien die Stromdichte im Leiter geschlossen umlaufen.



Die dritte Maxwell-Gleichung beschreibt die Kopplung elektrischer und magnetischer Felder.

$$rot E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Die Rotation von \vec{E} führt zu einem magnetischen Wirbelfeld, d.h. zu einer Drehung des Feldes um eine Achse.

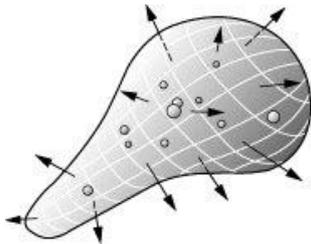
Anm.: Die Namensgebung für den Nabla-Operator stammt von William Robertson Smith (1846–1894) und wurde von einem antiken Saiteninstrument abgeleitet. Der Differentialoperator fand zunächst in der Hamiltonschen Quaternionenanalyse seine Verwendung. Später wurde der Operator von Peter Guthrie Tait (1831-1901) weiterentwickelt, welcher auch die heutige Form eines auf den Kopf gestellten Deltas (∇) einführte.

4 Integralsätze

Bei der Entwicklung der Integralsätze waren Vorgänge aus der Strömungsmechanik beispielgebend.

4.1 Satz von Gauß

Der *Satz von Gauß* (in der Literatur zuweilen etwas ungenau als *Gaußsches Gesetz* bezeichnet) verknüpft das Volumenintegral der Divergenz mit dem Randintegral über eine geschlossenen Fläche.



$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} \cdot dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

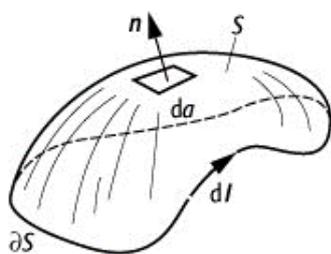
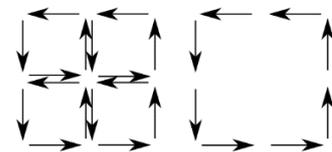
$$\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

Das Gaußsche Gesetz folgt aus dem Randintegral über eine geschlossene Fläche und besagt, dass der elektrische Fluß proportional zur Summe der eingeschlossenen Ladungen ist.

4.2 Satz von Stokes

Der *Satz von Stokes* verknüpft die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ eines Vektorfeldes mit dem Linienintegral entlang der Berandung einer Fläche.

Hinter dem Satz von Stokes verbirgt sich ein topologisches Prinzip, das in seiner einfachsten Form besagt, dass sich bei "orientierter Pflasterung eines Flächenstücks" die Wege der einzelnen Umläufe im Innern paarweise aufheben, so dass nur die Randkurve übrig bleibt.



$$\iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

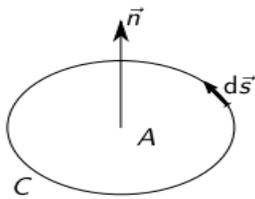
Ein Flächenintegral kann über die Rotation eines Vektorfeldes in ein geschlossenes Kurvenintegral umgewandelt werden. Die durchlaufene Kurve muss dem Rand ∂S der betrachteten Fläche entsprechen.

4.3 Zirkulation

Eng verwandt mit der Rotation ist die *Zirkulation*, die konzeptionell von Kelvin (1869) in die Physik eingeführt wurde. Als Zirkulation Γ wird das Umlaufintegral eines Vektorfeldes \vec{u} entlang eines geschlossenen Weges bezeichnet (welches nach Stokes gleichwertig zum Integral des Wirbelvektors über eine von C umschlossene Fläche ist).

Wo Feldlinien als in sich geschlossene Kurven vorkommen, ist die Zirkulation ungleich Null. Ist

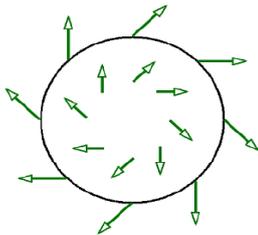
das Umlaufintegral aber Null, so existiert ein Potential resp. eine Potentialströmung.



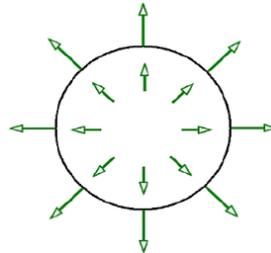
$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} dA$$

Die Zirkulation ist das integrale Äquivalent der Rotation (Integral des Wirbelvektors) und damit ein Maß für die mittlere Wirbelstärke innerhalb einer Fläche.

Wirbelfreie und wirbelbehaftete Vektorfelder:



Wirbelfeld mit Rotation



Quellenfeld ohne Rotation

Anm.: Bei magnetischen Feldern wird das Umlaufintegral auch als *Umlaufspannung* bezeichnet, welche Auskunft über die Wirbelstärke der felderregenden Ursache gibt.

5 Gleichungen des elektromagnetischen Feldes

Einstein (1931) nannte Maxwells Gesamtwerk "das Tiefste und Fruchtbare, das die Physik seit Newton entdeckt hat". Ludwig Boltzmann (1893) äusserte seine Hochachtung vor Maxwells Leistung – den Vierzeiler aus Goethes Faust variierend – mit den pathetischen Worten:

War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb,
 Die mit geheimnisvoll verborg'nen Trieb
 Die Kräfte der Natur um mich enthüllen
 Und mir das Herz mit stiller Freud erfüllen.²⁶

5.1 Historischer Exkurs

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts waren die meisten Naturwissenschaftler der Ansicht, dass sich elektrische und magnetische Felder instantan im Raum ausbreiten. Wie bei der Gravitation gingen die Naturforscher beim Elektromagnetismus von einer Fernwirkungstheorie aus.

Newton'sches Gravitationsgesetz

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante:

$$G = (6,67430 \pm 0,00015) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Coulombsches Gesetz der Elektrostatik

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

k-Faktor im Internationalen Einheitensystem:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,987551787 \cdot 10^9 \frac{Vm}{As}$$

²⁶ Ludwig Boltzmann: Geleitwort zur Vorlesung über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichts (1893).

Weil das Coulombsche Gesetz der Elektrostatik in formaler Hinsicht dem Newtonschen Gravitationsgesetz aufs Haar gleicht, lag die Annahme nahe, dass sich elektrische Felder instantan ausbreiten. Schliesslich gelang Weber und Kohlrausch (1856) der experimentelle Nachweis, dass sich die Felder mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreiten. Der von ihnen ermittelte Wert erwies sich aber als zu klein. Ungeachtet dessen war dies ein erstes Indiz dafür, dass Licht ein elektromagnetisches Phänomen sein könnte.

Es war James C. Maxwell, welchem die Ausarbeitung einer in sich konsistenten Theorie des elektromagnetischen Feldes gelang. Maxwell postulierte, dass elektrische und magnetische Felder zwei sich ergänzende Manifestationen desselben Phänomens sind. Im Unterschied zu früheren Annahmen war Maxwells Elektrodynamik eine ausgeprägte Nahwirkungstheorie mit endlicher Lichtgeschwindigkeit.

Vermutlich gelangte Maxwell durch das Weber-Kohlrausch-Experiment zur Annahme, dass auch das Licht als eine elektromagnetische Erscheinung zu betrachten sei.

This velocity is so nearly that of light, that it seems we have strong reason to conclude that light itself (including radiant heat, and other radiations if any) is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the electromagnetic field according to electromagnetic laws.²⁷

(Diese Geschwindigkeit ist so nahe an der des Lichtes, dass wir starken Grund zu dem Schluss haben, dass das Licht selbst (einschließlich der Wärmestrahlung sowie möglicher anderer Strahlung) eine elektromagnetische Störung ist, die sich entsprechend der elektromagnetischen Gesetze in Form von Wellen im elektromagnetischen Feld fortpflanzt.)

Der anerkannte Wert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt $\approx 3,1 \cdot 10^8$ m/s.

Eine von Maxwells grössten Leistungen bestand zweifellos in der Einführung des sog. *Verschiebungsstromes* (Displacement current), der das Ampèresche Gesetz mit einem Zusatzglied erweiterte und so die Vorgänge in Dielektrika und im Vakuum adäquat beschrieb. Der Kulminationspunkt dieser Entwicklung gipfelte in der elektromagnetischen Feldtheorie bzw. der fundamentalen Erkenntnis, dass elektromagnetische Wellen und Licht sich lediglich durch ihre Frequenz unterscheiden.

Es dauerte allerdings seine Zeit, bis sich die Maxwellsche Elektrodynamik auf dem Europäischen Kontinent durchzusetzen vermochte. Naturwissenschaftler wie Helmholtz schwankten zwischen der Weberschen und der Maxwellschen Elektrodynamik. Die grossen Erfolge der gegen Ende des 19. Jahrhunderts aufkommenden Nachrichtentechnik bezeugten aber die Richtigkeit der Maxwellschen Theorie.

1886 gelang es Heinrich Hertz (1857-1894) mit bescheiden anmutenden Mitteln, elektromagnetische Wellen zu erzeugen und in einem Empfänger nachzuweisen. Als Generator diente der von Rühmkorff konstruierte Funkeninduktor, der an eine mit Kugeln kapazitiv verlängerte Dipolantenne angeschlossen wurde. Dem Experimentator zu Ehren erhielt die Frequenz (f) die Einheit Hertz ($1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$).

²⁷ James C. Maxwell: A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field (1864-65).

5.2 Quaternionen

In seinem Aufsatz *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* (1865) benutzte Maxwell 4×3 Differentialgleichungen, zu denen 2×3 Materialgleichungen und 2 skalare Differentialgleichungen hinzukamen. Partielle Ableitungen wurden mit geraden d 's geschrieben (anstelle des heute gebräuchlichen $\partial/\partial t$).

In der zweibändigen *Treatise*²⁸ (1873) benutzte Maxwell unter Verwendung Hamiltonscher Quaternionen 21 Gleichungen, die einige Jahre später von Oliver Heaviside (1850-1925) vereinfacht wurden, so dass zur Beschreibung elektromagnetischer Felder im ladungslosen Raum nur noch vier Gleichungen benötigt wurden.

Ein unbestrittener Vorteil der Hamiltonschen Quaternionenschreibweise war, dass sich ausser Vektoren auch skalare Grössen zwanglos unterbringen liessen.

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \quad \begin{array}{l} i, j, k \text{ sind } \textit{Einheitsvektoren}; \text{ im angelsächsischen Raum wird} \\ \text{auch die Bezeichnung } \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z \text{ verwendet.} \end{array}$$

Für den anwendungsorientierten Ingenieur erwies sich diese Schreibweise aber als unnötig kompliziert, so dass später davon Abstand genommen wurde.²⁹ Heute benutzt man Quaternionen u.a. in der Computergrafik, um räumliche Drehungen zu beschreiben.

1892 wurden die Maxwell-Hertzschen-Feldgleichungen durch den Telegrafisten und Elektrotechniker Oliver Heaviside (1850-1925) in vektorieller Notation festgehalten. Als Autodidakt benötigte Heaviside eine geraume Zeit, um sich in die höhere Mathematik einzuarbeiten; doch schliesslich kam er weiter, als manche seiner Berufsgenossen. Von ihm stammt das dreiteilige Werk *Electromagnetic Theory*. Der dritte Band erschien erst 1912. Heaviside entwickelte ferner ein Lösungsschema (Operatorenrechnung) für algebraische Gleichungen, das als Vorläufer der Laplace-Transformation bezeichnet werden kann. Im Alter wurde Heaviside – möglicherweise durch seine Schwerhörigkeit bedingt – zum ausgesprochenen Sonderling.

Unabhängig von Heaviside schuf Josiah Willard Gibbs (1839-1903) die moderne Vektoranalysis.³⁰ In modernen Lehrbüchern finden sich die Operatoren grad , div und rot , die zu einer übersichtlicheren Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen beitragen.³¹ Mit diesem Instrumentarium lassen sich die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes erheblich vereinfachen, so dass anstelle der 4×3 Differentialgleichungen und 2×3 Materialgleichungen nur noch $4 + 2$ Gleichungen erforderlich waren. Die ursprünglich zwanzig Gleichungen wurden damit auf deren vier resp. sechs reduziert.

Anm.: Physikalisch gesehen war die Heaviside'sche Vereinfachung in einigen Augen ein Fehler, weil der skalare Teil in den Feldgleichungen verloren ging. Dass für die Elektrodynamik auch skalare Grössen (Potentiale) eine wichtige Funktion besitzen, wurde von E. T. Whittaker (1873-1956) in zwei Arbei-

²⁸ James C. Maxwell: *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Clarendon Press, 1873).

²⁹ Gerhard W. Bruhn: *Die Maxwell-Gleichungen – vom Original zur modernen Schreibweise* (Skript).

André Waser: *Zur Schreibweise der Feldgleichungen der Elektrodynamik* (Skript).

³⁰ J. Willard Gibbs: *Elements of Vector Analysis* (1884).

³¹ Gottlieb Strassacker, Roland Süsse: *Rotation, Divergenz und Gradient* (Teubner).

ten aufgezeigt.³² Aus irgendwelchen Gründen stiessen diese Arbeiten aber nicht auf das gebührende Interesse, so dass fortan nur noch von Transversalwellen die Rede war, die sich im Vakuum, in nichtleitenden Gasen, auf Lecherleitungen und in Koaxialkabeln mit einer mediumspezifischen Phasengeschwindigkeit ausbreiten.

5.3 Grundgleichungen der Elektrodynamik

5.3.1 Häufig vorkommenden Grössen und Einheiten

D	elektrische Flussdichte in As/m ²
E	elektrische Feldstärke in V/m
B	magnetische Flussdichte in Tesla [1 T = 1 Vs/m ²]
H	magnetische Feldstärke in A/m
j	Leitungsstromdichte in A/mm ²
P	elektrische Polarisierung in As/m ²
J	magnetische Polarisierung in Vs/m ²
F	Kraft in N
q	elektrische Ladung in Coulomb [1 C = 1 As]
v	Relativgeschwindigkeit in m/s
c	Lichtgeschwindigkeit in m/s
ε ₀	elektrische Feldkonstante in As/Vm
μ ₀	magnetische Feldkonstante in N/A ²

Anm.: In den Lehrbüchern ist – vermutlich aus persönlicher Vorliebe – eine voneinander abweichende Reihenfolge der Maxwellschen Gleichungen zu erkennen. Einige Autoren bezeichnen die vierte Maxwellgleichung als die erste und umgekehrt. Das soll uns nicht weiter stören, man muss es nur wissen.

5.3.2 Maxwellsche Gleichungen in differentieller und integraler Notation

Erste Maxwell-Gleichung (Gaußsches Gesetz der Elektrostatik)

$$\operatorname{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Quelle des elektrischen Feldes ist die Ladungsdichte.

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV$$

Der elektrische Fluss durch die Oberfläche ∂V eines Volumens ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

Zweite Maxwell-Gleichung (Gaußsches Gesetz der Magnetostatik)

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Das B-Feld ist quellenfrei und es gibt keine magnetischen Monopole.

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Der magnetische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens ist gleich Null.

³² E. T. Whittaker: On the partial differential equations of mathematical physics (1903).

E. T. Whittaker: On an expression of the electromagnetic field due to electrons by means of two scalar potential functions (1904).

Dritte Maxwell-Gleichung (Faradaysches Induktionsgesetz)

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Jede Änderung des B-Feldes erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Die elektrische Zirkulation über dem Rand einer Fläche ∂A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche.

Vierte Maxwell-Gleichung (Ampèresches Gesetz mit Maxwellscher Ergänzung)

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Die Wirbel des Magnetfeldes hängen von der Leitungsstromdichte und von der elektrischen Flussdichte ab

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{j}_l + d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Die magnetische Zirkulation über dem Rand einer Fläche ∂A ist gleich der Summe aus dem Leitungsstrom und der zeitlichen Änderung des elektrischen Flusses durch die Fläche.

Die vierte Maxwell-Gleichung berücksichtigt ausser der Stromdichte \mathbf{j} den Verschiebungsstrom (Displacement current) resp. die Verschiebungsstromdichte $\partial \mathbf{D} / \partial t$.

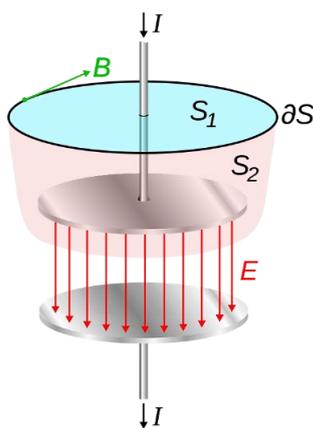


Abb. 16: Leitungsstrom und Verschiebungsstrom³³

Ein Strom I fließe durch einen langen Draht, in dem ein Kondensator liegt. Das Ampèresche Gesetz (Durchflutungsgesetz) besagt, dass das Wegintegral des magnetischen Feldes entlang eines beliebigen Weges um den Draht proportional zum Strom ist, der durch eine von diesem Weg aufgespannte Fläche S_1 (blau) fließt. Durch die sich bis ins Dielektrikum erstreckende alternative Fläche S_2 (rosa) fließt aber kein Strom, so dass auch kein Magnetfeld detektierbar ist. Das Durchflutungsgesetz wäre demnach von der Form der Oberfläche abhängig. Diese Diskrepanz wird durch die Maxwellsche Ergänzung bereinigt, indem ein sog. Verschiebungsstrom eingeführt wurde, den man sich als zeitliche Änderung des elektrischen Flusses durch die gegebene Oberfläche vorstellen muss. Der Verschiebungsstrom $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ist daher kein Strom, bei dem Ladung transportiert wird.

5.4 Zusätzliche Gleichungen

5.4.1 Materialgleichungen

Zur Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge in Materie werden ausser den vier Maxwellgleichungen zwei Materialgleichungen benötigt.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(E) & \mathbf{P} & \text{elektrische Polarisation in As/m}^2 \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{J}(H) & \mathbf{J} & \text{magnetische Polarisation in Vs/m}^2 \end{aligned}$$

³³ Bildquelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Verschiebungsstrom>

5.4.2 Kraftwirkungen

In den Maxwell'schen Gleichungen kommen bekanntlich keine Kräfte vor. Zur Beschreibung der Bewegung elektrisch geladener Körper in elektrischen und magnetischen Feldern werden zusätzliche Gleichungen benötigt.

Auf ein bewegtes und geladenes Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern wirkt die *Lorentzkraft*.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

5.4.3 Wellengleichungen

Die Wellengleichungen³⁴ für das elektromagnetische Feld lauten:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Der Laplace-Operator (Δ) ist ein Differentialoperator.

$$\Delta := \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Mit dem d'Alembert-Operator (\square) lautet die Wellengleichung:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad \text{Der d'Alembert-Operator wird manchmal auch "Quabbla" genannt.}$$

Anm.: Lässt man im d'Alembert-Operator die Geschwindigkeit c anwachsen, so wird die Zeit in zunehmendem Maße absoluter. Bei $c = \infty$ wäre sie mit Newtons "wahrer Zeit" identisch. Dabei ginge der d'Alembert-Operator schliesslich in den (negativen) Laplace-Operator über, d.h die der Wellengleichung genügenden Feldgrössen würden Lösungen der Poisson-Gleichung. Dies würde den Zerfall des elektromagnetischen Feldes in seine elektrischen und magnetischen Komponenten bedeuten, eine gegenseitige Kopplung wäre nicht mehr gegeben. Weil sich c jedoch als eine Grenzgeschwindigkeit erweist, tritt dieser Fall glücklicherweise nicht ein.

Als einfachste Lösung der Wellengleichung erhalten wir eine ebene harmonische Welle (d.h. eine Welle mit sinsuförmigem Verlauf).

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$$

A_0 Amplitude
 ω Kreisfrequenz in Hertz [1 Hz = 1/s]
 $kx - \omega t$ wird als "Phase" der Welle bezeichnet

Kommt es zur Abstrahlung der gekoppelten Felder durch eine Antenne, so breitet sich die elektromagnetische Welle mit Lichtgeschwindigkeit im Raum aus.

Im Vakuum beträgt die Signal- resp. Phasengeschwindigkeit:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$$

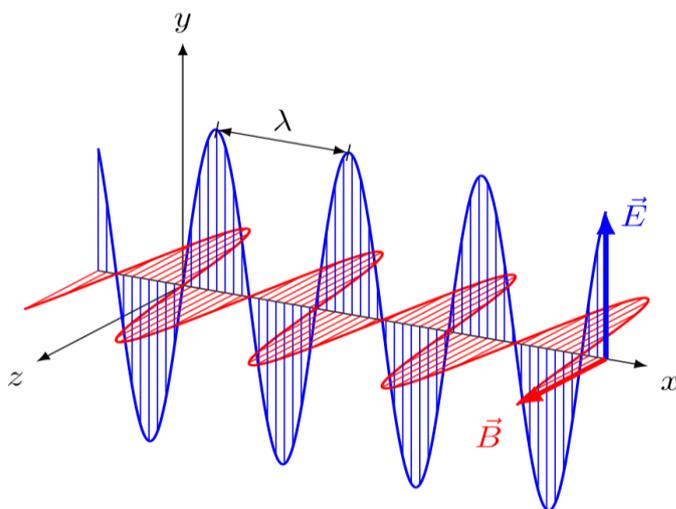
³⁴ Leicht nachvollziehbare Herleitungen der Wellengleichung und Lösungen für das elektromagnetische Feld finden sich bei:

Jürgen Wagner: Erste Schritte in die Theoretische Physik (Springer Spektrum).
 Gottlieb Strassacker, Roland Süsse: Rotation, Divergenz und Gradient (Teubner).

In Materie kommen die stoffspezifischen Zahlenwerte für *Permeabilität* und *Permittivität* hinzu, so dass gilt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \cdot \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \quad \begin{array}{l} \epsilon_r \text{ stoffabhängige Permittivitätszahl} \\ \mu_r \text{ stoffabhängige Permeabilitätszahl} \end{array}$$

Insgesamt werden drei Zonen unterschieden, die als Nahfeld, Übergangsfeld (Fresnel-Region) und Fernfeld (Fraunhofer-Region) bezeichnet werden. Die Feldvektoren stehen im Fernfeld rechtwinklig aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Offensichtlich handelt es sich um eine Transversalwelle. Bei genügender Distanz zum Emissionsort schwingen die Feldzeiger \vec{E} und \vec{B} phasengleich und mit gleich grosser Amplitude.



Der Poynting-Vektor (*S*) zeigt in Richtung des Energieflusses :

$$\vec{S} = E \times H$$

S Energiestromdichte in W/m²

Abb. 17: Modelldarstellung einer EM-Welle³⁵

In der irdischen Atmosphäre kommt es für Frequenzen im Kurzwellenbereich zu Mehrfachreflexionen an der Ionosphäre, so dass mit einem genügend starken Signal die Erde umrundet werden kann. Die Reflexionsfähigkeit ist von der Sonneneinstrahlung abhängig und während der Nachtzeit optimal.

5.4.4 Vektorpotential

Der Vollständigkeit wegen sei auch das (magnetische) Vektorpotential (\vec{A}) erwähnt.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \text{grad } \phi \quad \text{A Vektorpotential in Vs/m}$$

Rainer Scharf schreibt zum magnetischen Vektorpotential:

In der Elektrodynamik lässt sich trefflich darüber streiten, ob das Magnetfeld **B** oder das Vektorpotential **A** die fundamentalere Größe ist. Einerseits hat **B** eine direkt beobachtbare Wirkungen, während **A** durch Eichtransformationen verändert werden kann, ohne dass dies experimentelle Konsequenzen hätte. Andererseits zeigt der *Aharonov-Bohm-Effekt*, dass **A** die quantenmechanische Interferenz von Elektronen verändern kann, ohne dass die Elektronen ein-

³⁵ Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Welle

em **B**-Feld ausgesetzt sein müssen. Jetzt haben Forscher der Universität Nizza anhand des *Maxwell-Lodge-Effektes* nachgewiesen, dass das Vektorpotential auch in der klassischen Elektrodynamik Auswirkungen hat, die sich nicht auf ein Magnetfeld zurückführen lassen.³⁶

5.4.5 Der elektromagnetische Feldstärketensor

Für eine besonders kompakte Schreibweise elektromagnetischer Größen lassen sich die elementaren Felder **E** und **B** im sog. *Faraday-Tensor* (auch elektromagnetischer Feldstärketensor genannt) zusammenfassen. Zum Verständnis der mathematischen Zusammenhänge sind in diesem Fall Grundkenntnisse der Tensorrechnung³⁷ erforderlich.

Der elektromagnetische Feldstärketensor ist gewöhnlich definiert durch das Vektorpotential.

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad \text{daraus folgt:} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

In einer flachen Raumzeit (Minkowski-Metrik) mit kartesischen Koordinaten kann der Feldstärketensor wie folgt ausgeschrieben werden:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Feldstärketensor als Tensor zweiter Stufe in kontravarianter Schreibweise.}$$

Der Vorteil von Tensoren liegt u.a. darin, dass sie beim Wechsel des Bezugssystems erhalten bleiben. Lediglich ihre Komponenten verändern sich. Seine Krönung verzeichnete der Tensorkalkül in Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie.

6 Eine neue Transformation

Bei der Anwendung der Maxwell'schen Gleichungen standen die Physiker vor dem Dilemma, dass sich die Gleichungen unter Galilei-Transformation als nicht invariant erwiesen. Abhängig vom Bezugssystem entstanden unterschiedliche Lösungen – für Physiker ein unzumutbarer Zustand. Entweder waren die Feldgleichungen falsch oder die Galilei-Transformation unvollständig.

Galilei-Transformation

$$x = x' + vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'$$

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) entwickelte in der Folge völlig neuartige Transformationsgleichungen, bei welchen sich bewegte Maßstäbe verkürzten und bewegte Uhren verlangsamt.

Lorentztransformation

$$x = k(x' + vt'); \quad x' = k(x - vt); \quad t = (kx - x')/kv; \quad t' = (x - kx')/kv$$

³⁶ <https://www.pro-physik.de/nachrichten/maxwell-lodge-statt-aharonov-bohm>

³⁷ Eine verständliche Einführung in die Tensorrechnung bieten:

Hans Karl Iben: Tensorrechnung (Teubner).

Dieter Schroeder: Vektor- und Tensorpraxis (Verlag Harri Deutsch).

Es zeigte sich bald, dass die Maxwellschen Gleichungen unter Lorentz-Transformation bereits von Natur aus invariant waren. Obwohl auf dem richtigen Weg, vermochte sich Lorentz noch nicht vom geliebten Ätherparadigma zu trennen.

Es war Albert Einstein (1879-1955), welcher das Dilemma der Physiker mit durchdringender Klarheit erfasste, um mit einer radikalen Neuordnung von Raum und Zeit den benötigten Paradigmawechsel herbeizuführen. In einem bahnbrechenden und inhaltlich später als "Spezielle Relativitätstheorie" bezeichneten Artikel schrieb er:

Dass die Elektrodynamik Maxwells – wie dieselbe gegenwärtig aufgefasst zu werden pflegt – in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhafte scheinen, ist bekannt...³⁸

In seinen letzten Lebensjahren würdigte Lorentz den wesentlich jüngeren Einstein mit den salbungsvollen Worten:

Ich betrachtete meine Zeittransformation nur als eine heuristische Arbeitshypothese. Die Relativitätstheorie ist also allein Einsteins Arbeit. Und es kann keinen Zweifel geben, dass er sie gefunden hätte, selbst wenn die Arbeit all seiner Vorgänger zur Theorie dieses Gebietes überhaupt nicht getan worden wäre. Seine Arbeit ist in diesem Sinne unabhängig von den vorherigen Theorien.³⁹

Weitere Wissenschaftler, die den Weg zur Speziellen Relativitätstheorie anbahnten:

Woldemar Voigt (1850-1919), George Francis FitzGerald (1851-1901), Joseph Larmor (1857-1942) und Henri Poincaré (1854-1912). Letzterem kommt das Verdienst zu, der Lorentztransformation ihre definitive Gestalt erteilt zu haben.

³⁸ Albert Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper (Annalen der Physik, 1905).

³⁹ Hendrik A. Lorentz: Die Relativitätstheorie für gleichförmige Translationen (Leipzig, 1929).

7 Wissensquellen

Wie üblich habe ich Skizzen und Grafiken aus Zeitgründen nicht selbst erstellt, sondern jeweils mit Quellenangabe aus anderen Websites entlehnt.

7.1 Literatur

David J. Griffiths: Elektrodynamik (Pearson).

Banesh Hoffmann: Einsteins Ideen (Spektrum)

Helmut Vogel: Gerthsen Physik, 18. Auflage (Springer).

Gottlieb Strassacker, Roland Süße: Rotation, Divergenz und Gradient (Springer Vieweg).

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd. 3 (Springer Vieweg).

7.2 Weblinks

<https://de.wikipedia.org/wiki/Elektrodynamik>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen>

http://www15.ovgu.de/exph/mathe_gl/scripte.htm

<https://www.maths2mind.com/elektrotechnik-physik/>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Zirkulation_\(Feldtheorie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Zirkulation_(Feldtheorie))

<https://www.eit.hs-karlsruhe.de/hertz/quicklink/startseite.html>

https://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte_der_Lorentz-Transformation

https://de.wikipedia.org/wiki/Eine_dynamische_Theorie_des_elektromagnetischen_Feldes