Grundlagen der Mechanik

1 Polare und axiale Vektoren

In der Physik werden Vektoren in polare und axiale Vektoren eingeteilt. Letztere werden auch als Pseudovektoren bezeichnet.

a) Grössen, die eine Richtung im Raum besitzen wie die Geschwindigkeit oder die Kraft gehören zu den **polaren Vektoren** (auch als *Schubvektoren* bezeichnet).

b) Grössen, denen ein Drehsinn zugeordnet ist wie die Winkelgeschwindigkeit oder das Drehmoment gehören zu den **axialen Vektoren** (auch als *Drehvektoren* bezeichnet).

Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass die Komponenten eines polaren Vektors den Koordinatenachsen, die eines axialen Vektors aber den Koordinatenebenen zugeordnet sind.

Verknüpft man zwei polare Vektoren durch das Vektorprodukt[1], so entsteht ein axialer Vektor wie bspw. das Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Das Vektorprodukt aus einem axialen und einem polaren Vektor ist dagegen wieder ein polarer Vektor wie bspw. die Kreisbahngeschwindigkeit $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Ferner gilt:

Beim Skalarprodukt aus einem polaren und einem axialen Vektor ändert sich das Vorzeichen.

Dagegen ist das Skalarprodukt zweier polarer oder zweier axialer Vektoren invariant gegen Inversion. Als Inversion bezeichnet man eine Spiegelung am Ursprung.

Worin unterscheiden sich polare Vektoren von axialen Vektoren?

Bei einer Punktspiegelung erfolgt beim polaren Vektor eine Vorzeichenumkehr.

$r' = -r$

Bei einem axialen Vektor ändert sich bei einer Punktspiegelung das Vorzeichen nicht.

$M' = M$

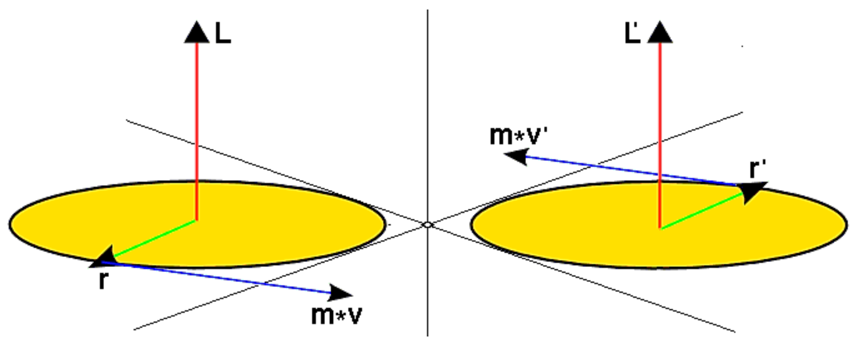

Abb. 6: Drehimpuls **L** als Beispiel eines Pseudovektors

[1] Beim Vektor- oder Kreuzprodukt **v** = **a** x **b** steht der resultierende Vektor senkrecht auf der durch die beteiligten Vektoren aufgespannten Ebene.

Während Ortsvektor **r** und Impuls **p** = **m** · **v** bei einer Punktspiegelung ihre Richtung umkehren, bleibt die des Drehimpulses **L** = **r** × m**v** unverändert.[2]

2 Newtonsche Mechanik

Zwei Gleichungen sind massgebend für die Newtonsche Mechanik: Die Bewegungsgleichung der Dynamik und die Feldgleichung der Gravitation.

2.1 Bewegungsgleichung

In mathematischer Form lautete das zweite Gesetz von Newton:

$$F = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

Aus der Bewegungsgleichung folgt durch zweimalige Integration, dass die Bahnkurve eines Massenpunktes, auf den keine Kraft wirkt, eine Gerade sein muss.

Bezugnehmend auf Galilei gilt: Ein kräftefreier Körper befindet sich in geradlinig gleichförmiger Bewegung oder im Zustand der Ruhe. Letzere ist ein Spezialfall der gleichförmigen Bewegung.

2.2 Feldgleichung

Für eine beliebige Massenverteilung lautet die Newtonsche Feldgleichung:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\varrho$$

Das Quadrat des Nabla-Differentialoperators (∇^2) wird auch als Laplaceoperator (Δ) bezeichnet. Das zugehörige Symbol darf nicht verwechselt werden mit dem griechischen Grossbuchstaben für Differenz.

Für eine punktförmige Masse ergibt sich als Lösung der obigen Differentialgleichung:

$$\Phi = -G\frac{M}{r}$$

Mit Φ bezeichnen wir das Gravitationspotential eines zentralen Massenpunktes.

Nach Newton erzeugt jede Masse M ein Gravitationsfeld, das sich in den umgebenden Raum erstreckt. Auf einen beliebigen Körper wirkt dadurch eine Kraft, so dass er in Richtung der Zentralmasse beschleunigt wird.

$$F = -m\frac{d\Phi}{dr}$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass der Körper in negativer Richtung, d.h. zur Zentralmasse hin, beschleunigt wird.

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Pseudovektor

3 Potentialtheorie

Potentiale spielen in der Physik eine wichtige Rolle. So bspw. in der Himmelsmechanik oder in der Elektrodynamik. Ein Potential ist eine Eigenschaft eines Kraftfeldes, potentielle Energie zu speichern.

3.1 Potentielle Energie

Wird ein Körper in einem Gravitationsfeld von einem niedrigeren auf ein höheres Potential angehoben, nimmt seine potentielle Energie zu.

$$E_{pot} = mgh = F_G \cdot h$$

h	Hubhöhe
g	Erdbeschleunigung [9,80665 m/s²]
F_G	Gewichtskraft

Obige Gleichung gilt nur in Bereichen annähernd konstanter Erdbeschleunigung. Ansonsten muss über den Weg integriert werden.

$$E_{pot} = m \int_{\mathrm{h1}}^{\mathrm{h2}} \mathrm{g} \cdot \mathrm{dh}$$

Durchläuft ein Körper eine Fallhöhe, wandelt sich Lageenergie in Bewegungsenergie um:

$$\Delta E_{pot} \rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

3.2 Gravitationspotential

Das Potential ist eine Grösse, die von der Höhe über Meer abhängt.

$$\Phi(h) = \frac{U}{m} = gh\ [J/kg]$$

U potentielle Energie

Das Potential ist ein Skalar und somit keine gerichtete Grösse. Flächen gleichen Potentials werden als Äquipotentialflächen bezeichnet (bei einer homogenen Massenkugel sind es konzentrische Kugelschalen). Als Schnitt mit der Bildebene entstehen Äquipotentiallinien.

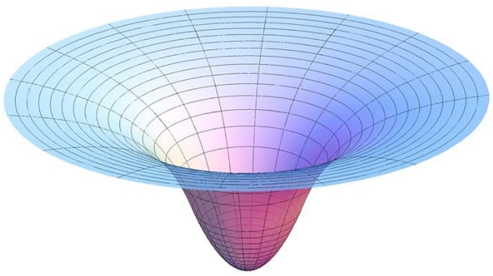

Abb. 1: Potentialtrichter

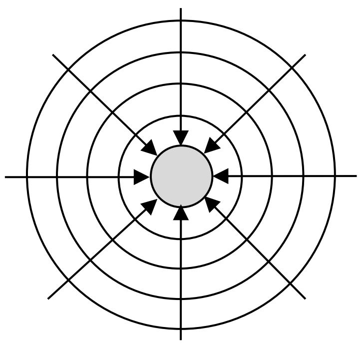

Abb. 2: Äquipotentiallinien.

Das Potential Φ am Ort r im Gravitationsfeld einer Zentralmasse ist derjenigen Arbeit zahlenmässig gleich, die gewonnen wird, wenn eine Masse von bspw. 1 kg aus dem Unendlichen an den Ort r gelangt.

Verlegt man den Nullpunkt des Potentials ins Unendliche, so verschwindet die potentielle Energie. Die Zentralkraft verliert bei r → ∞ ihre Stärke.

$$\Phi(r) = -\gamma \frac{M}{r}$$

γ	Gravitationskonstante [6,67259e-11 Nm²/kg²]
M	Erdmasse
r	Radius

Entlang einer Potentiallinie wird keine Arbeit verrichtet. Die zwischen zwei Potentiallinien umgesetzte Energie ist wegunabhängig.

Für einen geschlossenen Weg gilt somit:

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$$

Wird ein Körper in einem Zentralfeld an einen Ort mit einem höheren Potential verschoben, muss Arbeit erbracht werden.

$$W_{12} = \int_{\mathrm{r1}}^{\mathrm{r2}} \mathbf{F}(\mathrm{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = -\gamma \cdot \mathrm{Mm}\left(\frac{1}{\mathrm{r2}} - \frac{1}{\mathrm{r1}}\right)$$

W ist nun als Energie der Lage bzw. ΔE_{pot} im Körper gespeichert.

3.3 Gravitationskraft

Zwischen zwei Massen wirkt eine anziehende Kraft.

Nach Newton gilt:

$$F_{grav} = \gamma \frac{Mm}{r^2} \cdot \boldsymbol{e}_r$$

M	Erdmasse
m	Probemasse
r	Abstand
e_r	Einheitsvektor

3.4 Beschleunigungsfeld

Das Beschleunigungsfeld ist unabhängig von der Probemasse.

$$g(r) = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} = -\gamma\left(\frac{M}{r^2}\right)$$

g wird als Gravitationsfeldstärke bezeichnet und ist mit der Fallbeschleunigung identisch.

3.5 Gradientenfeld

Führt man eine Richtungsableitung (senkrecht zu den Äquipotentiallinien) durch, entsteht ein Gradientenfeld. Seine Vektoren zeigen in die Richtung des steilsten Potentialanstieges.

$$\boldsymbol{g}(r) = -grad\Phi(r) = -\nabla\Phi(r)$$

∇ (Nabla) ist ein Differentialoperator; in kartesischen Koordinaten gilt:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{e}\mathrm{x} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{e}\mathrm{y} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\mathbf{e}\mathrm{z}$$

Unter dem Gradienten versteht man die Änderung des Potentials pro Wegelement d**r** in radialer Richtung.

Ändert sich das Potential mit dem Ort, ist folglich auch ein Beschleunigungsfeld mit einer Kraft **F** = m**g** vorhanden.

4 Lagrange-Hamilton Mechanik

4.1 Langrange-Funktion

Die Lagrange-Funktion (Lagrangian) eines Massenkörpers ist gegeben durch die Differenz von kinetischer und potentieller Energie.

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V$$

Die kinetische Energie (T) ist üblicherweise eine Funktion der Geschwindigkeit $\dot{q}_i(t)$, während die potentielle Energie (V, geleg. mit U bezeichnet) eine Funktion des Ortes $q_i(t)$ ist.

Oftmals wird auch die Hamilton-Funktion – als Summe von kinetischer und potentieller Energie – benötigt.

$$H = T + V$$

Als Wirkung (S) bezeichnet man das Zeitintegral der Lagrange-Funktion.

$$S = \int_{t0}^{t1} L\, dt$$

Die Wirkung besitzt die Dimension "Energie · Zeit". Weil die Wirkung eine Funktion von einer Menge von Funktionen ist, bezeichnet man sie als *Funktional*.

Die in der Natur realisierte Bahnkurve eines Teilchens entspricht der Kurve, bei der sich die Wirkung als Extremum (meist ein Minimum, gelegentlich auch ein Maximum) manifestiert. Somit ist die erste Ableitung der Funktion f'(S) = 0.

In besagtem Fall ändert sich die Wirkung nicht, wenn die Bahnkurve leicht variiert wird.

$$q = q + \delta q \qquad \delta S = 0$$

Physiker sprechen im Kontext vom Prinzip der kleinsten Wirkung (Principle of least Action) oder vom *Hamiltonschen Prinzip*.

Die Änderung der Wirkung wird durch das folgende Integral bestimmt:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right)$$

Daraus folgt die Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

Schliesslich wird die Energie eines Systems bestimmt durch L und die Ableitungen von L.

$$E = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

4.2 Hamilton-Funktion

Zwei Beispiele verdeutlichen unserer Aussagen:

a) Freier Massenpunkt

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{q})^2$$

Aus der Lagrangefunktion folgt die Bewegungsgleichung.

$$m\ddot{q} = 0$$

Die Lösung ist eine geradlinig-gleichförmige Bewegung. Im Euklidischen Raum resultiert daraus eine Gerade.

b) Eindimensionaler harmonischer Oszillator

Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion des Oszillators lauten:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

Die Bewegungsgleichung ist:

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Als Lösung der Differentialgleichung erhalten wir eine Sinusfunktion.

$$q(t) = a\ \sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitude (a) und Phase (φ) hängen von den Anfangsbedingungen ab.

4.3 Das Prinzip der minimalen Wirkung

Die Naturgesetze werden durch *Variationsprinzipien* beschrieben. Durch Variation der Wirkung lässt sich die Bahnkurve eines Teilchens mit der kürzesten Laufzeit bestimmen.

$$\delta S = \int_{t0}^{t1} \delta L\ dx = 0$$

Das *Hamiltonsche Prinzip*[3] besagt nun, dass von allen denkbaren Bahnen diejenigen Bahnen in der Natur durchlaufen werden, die eine stationäre Wirkung haben. Physikalische Felder und Teilchen nehmen danach für eine bestimmte Größe einen extremalen (d. h. größten oder kleinsten) Wert an. Deshalb wird das Prinzip von manchen Lehrbuchautoren auch das "Prinzip

[3] Sir William R. Hamilton (1805-1865) formulierte 1834 das *Prinzip der minimalen Wirkung* (auch Prinzip der stationären Wirkung), als Weiterentwicklung des Lagrangeformalismus.

der stationären Wirkung" genannt.

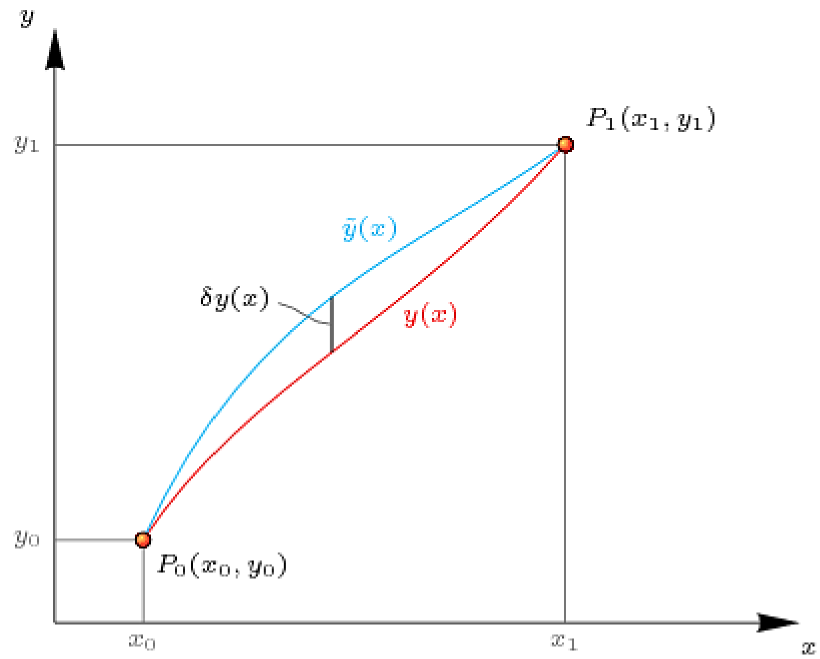

Abb. 3: Variation des Weges[4]

Aus dem Hamiltonschen Prinzip folgen die Lagrange-Gleichungen zweiter Art.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

4.4 Die Brachistochrone

Ein bekanntes Beispiel im Kontext ist die reibungsfreie Bewegung eines Massenpunktes im erdnahen Gravitationsfeld.

1696 veröffentlichte Johann Bernoulli (1667-1748), damals Professor der Mathematik und Medizin in Groningen, eine als Brachistochrone-Problembekannt gewordene Aufgabe, bei der nach der Bahnkurve mit der kürzesten Laufzeit gefragt wurde.

$$T = \int_{x1}^{x2} \frac{ds}{v} = minimal$$

Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt…

1697 wurde die Aufgabe auf Anraten von Leibniz nochmals in leicht modifizierter Form bekanntgemacht, um so auch ausländischen Wissenschaftlern eine Beteiligung zu ermöglichen.

Als Bahnkurve kürzester Laufzeit erwies sich in der Folge die Brachistochrone5, die Teil eines Zykloidenbogens ist. Die eingereichten Lösungen stammten von Leibniz, den Gebrüdern Bernoulli, l`Hospital und Tschirnhausen. Eine weitere Lösung erschien ohne Autorenangabe in den

4 Bartelmann et al.: Theoretische Physik (Springer Spektrum).

[5] Brachistochrone von griech. brachystos (kürzest) und chronos (Zeit).

Philosophical Transactions des Jahres 1697. Johann Bernoulli identifizierte den anonymen Verfasser mit den Worten "ex ungue leone" (den Löwen von der Pranke her) als Isaac Newton. Die Lösungsmethode verriet den Meister.

Das Brachistochrone-Problem ist mit dem *Fermatschen Prinzip* verwandt, welches besagt, dass sich das Licht stets den Weg mit der geringsten Laufzeit aussucht. Eine gelungene Erklärung zu diesem Phänomen findet sich bei Feynman.[6]

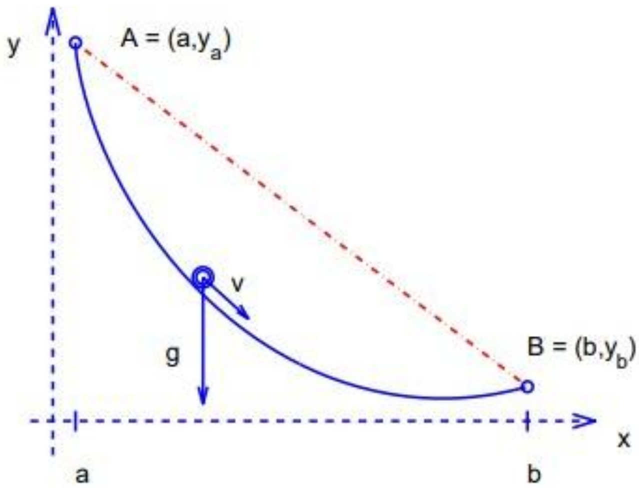

Abb. 4: Brachistochrone als Bahnkurve kürzester Laufzeit

Weil jedes Teilchen auf der Brachistochrone – unabhängig von der Wahl des Startpunktes – zur selben Zeit am Ziel ankommt, spricht man auch von einer *Tautochrone*. Anwendung findet die Tautochrone im Zykloidenpendel von Huygens, dessen Schwingungsdauer nicht von der Amplitude abhängig ist. Die Absicht dabei war, eine möglichst präzise Pendeluhr herzustellen.

Anm.: Eine vergleichbare Aufgabe wurde bereits 1638 von Galilei behandelt, der erkannt hatte, dass die Wegzeit einer Kugel entlang eines Polygonzuges kürzer war, als auf dem geraden Weg zwischen zwei Punkten unterschiedlichen Gravitationspotentials.

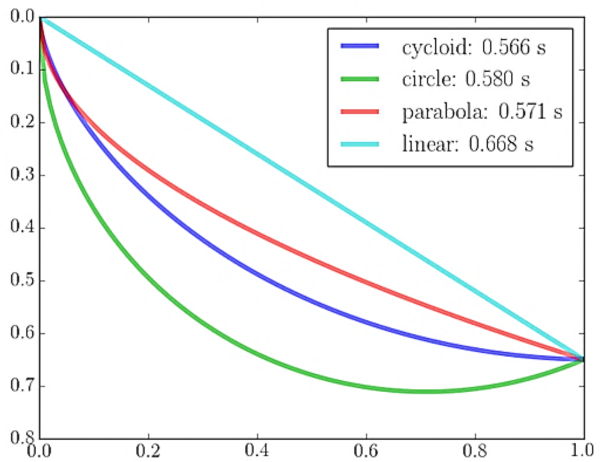

Abb. 5: Bahnen unterschiedlicher Laufzeit[7]

Weil sich ein Polygonzug mit zunehmender Polygonzahl einem Kreis annähert, vermutete Galilei

---

[6] Jörg Resag: Feynman und die Physik (Springer).

[7] https://scipython.com/blog/the-brachistochrone-problem/

als Bahnkurve mit der kürzesten Laufzeit die Kreisbahn. Dies sollte sich aber als falsch erweisen.

In Frage kam letztlich nur die *Zykloide* oder Rollkurve. Interessant dabei ist, dass die Zykloide nicht nur eine *Brachistochrone*, sondern auch eine *Tautochrone* ist, weil ein Massenpunkt von jedem Punkt der Kurve aus dieselbe Zeit benötigt, um zu seinem Tiefstpunkt zu gelangen. Das war schon Huygens anlässlich seiner Pendelversuche aufgefallen, wenn sich ein Gewicht anstatt auf einer Kreisbahn entlang einer Zykloide bewegt. Beim Zykloidenpendel resultiert unabhängig vom Ausschlag eine harmonische Schwingung mit konstanter Frequenz.

Trotzdem dauerte es noch einige Zeit, bis die zugrundeliegende Problematik mit Hilfe der Infinitesimalrechnung, d.h. auf analytischem Wege, gelöst werden konnte. In einem übergeordneten Zusammenhang entspringt das Brachistochrone-Problem der Variationsrechnung. Im Kontext ist vom "Prinzip der kleinsten Wirkung" oder dem *Hamiltonschen Prinzip* die Rede.