

# **Allgemeine Relativitätstheorie**

## **Von Riemann bis Hilbert**

# 1 Geschichte der Allgemeinen Relativitätstheorie

Als Einstein im Sommer des Jahrs 1905 seine Arbeit "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" bei den Annalen der Physik einreichte, konnte er nicht erahnen, welchen Paradigmawechsel er damit bewirken würde. Noch viel weniger freilich konnte er wissen, dass er zehn Jahre später zum Urheber einer noch mächtigeren Umwälzung werden sollte. Die Entstehung der Speziellen Relativitätstheorie war durch die Vorarbeiten anderer Physiker gefördert worden. Bei der Allgemeinen Relativitätstheorie dagegen – zumindest was deren physikalischen Teil betraf – blieb Einstein der alleinige Ruhm vorbehalten. Die ART ist nach unserem Dafürhalten das eigentliche Meisterstück eines sich in tiefeschürfenden Gedankengängen bewegendem Denkers. In mathematischen Belangen unterstützte ihn zunächst Marcel Grossmann. Weitere Schützenhilfe leistete David Hilbert.

In einem Brief an Sommerfeld aus dem Jahre 1912 schrieb Einstein:

Ich beschäftige mich jetzt ausschließlich mit dem Gravitationsproblem und glaube nun, mit Hilfe eines hiesigen befreundeten Mathematikers aller Schwierigkeiten Herr zu werden. Aber das eine ist sicher, dass ich mich im Leben noch nicht annähernd so geplagt habe und dass ich große Hochachtung für die Mathematik eingeflößt bekommen habe, die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen in meiner Einfalt für puren Luxus ansah! Gegen dies Problem ist die ursprüngliche Relativitätstheorie eine Kinderei.

In den physikalischen Aspekten blieb es Einstein überlassen, den beschwerlichen Weg zu den Feldgleichungen der Gravitation allein zu beschreiten. Immerhin stand ihm auch hier sein treuer Intimus Besso als kompetenter Korrespondenzpartner zur Seite. Von Besso stammt eine Berechnung zum Merkur-Perihel (Einstein-Besso Manuskript, 1912), allerdings noch nicht mit dem richtigen Ergebnis.<sup>1</sup>

Das Ehrenfestsche Paradoxon (1909) hatte gezeigt, dass für beschleunigte Bezugssysteme eine nichteuklidische Geometrie erforderlich war. Eine solche – die Riemannsche Geometrie – gab es bereits. In seiner Habilitationsrede *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1868) hatte Riemann die Metrik auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension definiert und damit die Tür zu ungeahnten Weiten aufgestossen. Die Riemannsche Geometrie ist heute ein Teilgebiet der Differentialgeometrie, welche auch Räume mit negativer Krümmung einbezieht.

Für Einstein erwies sich die Riemannsche Geometrie – auf die ihn sein einstiger Studienkamerad Grossmann nun verwies – geradezu als Offenbarung. Insbesondere die Weiterentwicklung durch Elwin B. Christoffel (1829-1900), Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) und dessen Schüler Tullio Levi-Civita (1873-1941) lieferte das benötigte Rüstzeug für das mathematische Fundament der ART. Doch bis zu den definitiven Feldgleichungen war es noch ein weiter Weg.

Als Ehrenfest sein Paradoxon veröffentlichte, war Einstein noch nicht im Besitze des Absoluten Differentialkalküls. In diesem spielen folgende Grössen eine wesentliche Rolle:

a) Die nach ihrem Schöpfer benannten *Christoffelsymbole*  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$  sind in der Differentialgeometrie Hilfsgrößen (Pseudotensoren) zur Beschreibung der kovarianten Ableitung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. In der ART ermöglichen sie die kräftefreie Beschreibung der Bewegung von

---

<sup>1</sup> M. Janssen: *The Einstein-Besso Manuscript*.

Teilchen in einem Zentralfeld. In einer flachen Raumzeit verschwinden sie.

b) Ricci war der Erschaffer des absoluten Differentialkalküls. Nach ihm wurden der *Ricci-Tensor* und später der *Ricci-Fluss* benannt.

c) Levi-Civita erfand die *kovariante Ableitung*. Mit seinem Buch *Calcolo differenziale assoluto* sorgte er für eine Verbreitung der Tensorrechnung auch unter Physikern. Auf ihn geht der *Levi-Civita-Zusammenhang* zurück.

## 1.1 Unterschiedliche Geometrien

Einer der Wegbereiter nichteuklidischer Geometrien war kein Geringerer als Carl Friedrich Gauß (1777-1855). In seiner Flächentheorie hatte Gauß gezeigt, dass es verschiedene Krümmungen – nämlich eine äussere und eine innere – zu beachten galt. Ein Zylinder bspw. kann vollständig mittels den Gesetzen der Euklidischen Geometrie beschrieben werden. Seine Mantelfläche lässt sich verzerrungsfrei auf einer Ebene abwickeln, die Krümmung ist deshalb nur eine äussere. Flächen mit innerer Krümmung dagegen finden sich z.B. beim Torus. Solche Körper besitzen Eigenschaften, die unabhängig vom umgebenden euklidischen Raum sind.

1923 äusserte sich Einstein mit den Worten:

Die entscheidende Idee einer Analogie zwischen dem mathematischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie und der Gauss'schen Flächentheorie kam mir erst im Jahr 1912, als ich nach Zürich zurückgekehrt war, obwohl ich damals nicht mit den Arbeiten von Riemann, Ricci und Levi-Civita vertraut war. Das erstemal wurde meine Aufmerksamkeit durch meinen Freund Grossmann in diese Richtung gelenkt, als ich ihn mit dem Problem konfrontierte, kovariante Tensoren zu finden, deren Komponenten nur von den Ableitungen der Koeffizienten ( $g_{\mu\nu}$ ) der fundamentalen quadratischen Invariante abhängen.<sup>2</sup>

Ausgangspunkt auf dem Wege zur Entwicklung nichteuklidischer Geometrien war das Parallelenaxiom (fünftes Postulat des Euklid). In einer auf John Playfair (1748-1819) zurückgehenden Formulierung lautet es:

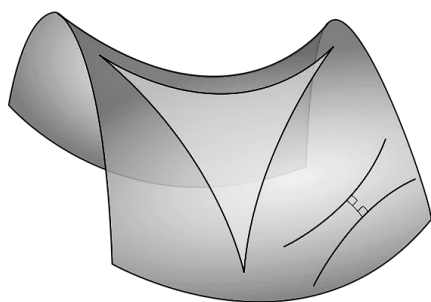
In einer Ebene  $\alpha$  gibt es zu jeder Geraden  $g$  und jedem Punkt  $P$  außerhalb von  $g$  genau eine Gerade, die zu  $g$  parallel ist und durch den Punkt  $P$  geht.

Oder anders gesagt: Das Parallelenaxiom behauptet, dass es zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt eine (und nur eine!) Parallele gibt.

Das Gemüte des mit Gauß befreundete Farkas (Wolfgang) Bolyai verdüsterte sich beim Gedanken, dass sich Parallelen erst im Unendlichen schneiden. Wie nur sollte das gehen. Die Kardinalfrage lautete: Lässt sich das Parallelenaxiom aus den übrigen Postulaten des Euklid ableiten? Heute wissen wir, dass es unmöglich ist. Erst der Sohn János Bolyai (1802-1860) erkannte, dass geometrische Konstellationen denkbar sind, wo das Parallelenaxiom nicht gilt und wo sich zwei Linien nie schneiden, sondern auseinanderstreben. Dies ist z.B. auf einer Sattelfläche der Fall, die zu den negativ gekrümmten oder hyperbolischen Räumen gehört. Auch ist die Winkelsumme von Dreiecken auf solchen Flächen immer kleiner als  $180^\circ$  (Abb. 1-1). Bei der sphärischen Geometrie mit positiver Krümmung ist es gerade umgekehrt. Parallelen erweisen sich dort als Längskreise

<sup>2</sup> N. Straumann: *Mathematik und Physik am Beispiel der Einstein-Grossmann-Kollaboration* (Skript, 2013).

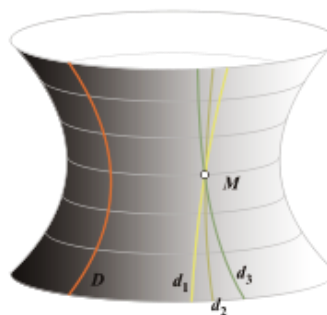
und die Winkelsumme übersteigt stets zwei rechte Winkel.



a) Sattelfläche als anschauliches Beispiel einer negativ gekrümmten Fläche.<sup>3</sup>

**Abb. 1-1**

Hyperbolische Geometrie



b) Durch den Punkt M verlaufen zwei Geodäten, die als Parallelen von D aufzufassen sind. Offensichtlich vesagt hier das Euklidische Postulat.<sup>4</sup>

János Bolyai war aber nicht der erste, der durch Negation des Parallelenaxioms zu einer nichteuklidischen Geometrie vorstieß. Bereits 1826 ff. hatte Nikolai Lobatschewski (1792-1856) in einer Abhandlung den Ausweg aus dem Dilemma gezeigt. Weil er bei der Berechnung eines Integrals aber einen Fehler beging, wurde diese Arbeit nicht beachtet. Aber selbst der Russe war nicht der erste. Gauß will seinen eigenen Worten zufolge bereits früher auf die Lösung gestossen sein. Er veröffentlichte seine diesbezüglichen Erkenntnisse aber nicht, weil er das "Geschrei der Bötier" scheute.

Anm. d. Verfassers: Die Legende besagt, dass Gauß bei der Vermessung des Königreichs Hannover in den Jahren 1818 bis 1826 nach Abweichungen von der Euklidischen Geometrie Ausschau gehalten habe. Die längste Seite des "grossen Dreiecks" zwischen Hoher Hagen, Brocken und Grosser Inselsberg besass eine Ausdehnung von 106 km. Dabei mass Gauß einen sphärischen Exzess von 14 Bogensekunden. Weil diese Abweichung im Bereich der Messunsicherheit der benutzten Instrumente lag, wurde keine signifikante Abweichung konstatiert. Aus heutiger Sicht ist dies nur allzugut verständlich, weil die Erde eine viel zu geringe Masse besitzt, um den umgebenden Raum merklich zu krümmen. Anders verhält es sich in Sonnennähe, wo Lichtstrahlen nicht länger auf geraden Bahnen verlaufen. Gewissermassen nebenbei entwickelte Gauß bei seinen Triangulationen den *Heliostaten* (eine Weiterentwicklung des Sextanten). Bereits wie zuvor die beiden Geistesriesen Archimedes und Newton erwies sich auch der *Princeps Mathematicorum* als begabter Ingenieur.

## 1.2 Das Äquivalenzprinzip

In seinem Kyoto-Vortrag (1922) beschrieb Einstein "den glücklichsten Gedanken" seines Lebens im November 1907 mit den Worten:

Ich sass auf meinem Sessel im Berner Patentamt, als mir plötzlich folgender Gedanke kam: Wenn sich eine Person im freien Fall befindet, dann spürt sie ihr eigenes Gewicht nicht. Ich war verblüfft. Dieser einfache Gedanke machte auf mich einen tiefen Eindruck. Er trieb mich in Richtung einer Theorie der Gravitation...

Für einen Probanden, der sich im freien Fall befindet, existiert in seiner unmittelbaren Umgebung

<sup>3</sup> Bildquelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Nichteuklidische\\_Geometrie](https://de.wikipedia.org/wiki/Nichteuklidische_Geometrie)

<sup>4</sup> Bildquelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Nikolai\\_Iwanowitsch\\_Lobatschewski](https://de.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Iwanowitsch_Lobatschewski)

kein Gravitationsfeld. Das Feld ist zwar vorhanden, zeitigt für den Probanden jedoch keine Wirkung. In einer Raumstation auf einem erdnahen Orbit lässt sich dies besonders eindrücklich belegen. In einem hinreichend kleinen Labor, das sich im freien Fall befindet, sind die mechanischen Phänomene nämlich exakt dieselben wie jene, die in völliger Abwesenheit von Gravitation in einem Inertialsystem beobachtet werden.

Wie nun sollte die neue Theorie der Gravitation überhaupt aufgebaut werden?

Wie gewohnt ging Einstein zunächst von einfachen, aber nichtsdestotrotz zielorientierten Gedankenexperimenten aus. Dazu gehörte, dass ein in einem Fahrstuhl beschleunigter Beobachter seinen Zustand letztlich nicht von der Wirkung eines Schwerfeldes unterscheiden konnte. Fuhr der Fahrstuhl nach oben, so wurde der Beobachter gegen den Boden angedrückt, als ob ihn ein Schwerfeld nach unten zöge. Fuhr der Fahrstuhl mit genügend grosser Beschleunigung nach unten, unterschied den Beobachter nichts vom freien Fall. Zwischen Beschleunigung und Gravitation bestand also eine Äquivalenz.

Aus dem *Äquivalenzprinzip* folgt die Gleichheit von träger und schwerer Masse.

Ein weiteres Gedankenexperiment finden wir bei Pössel. In einem ruhenden Fahrstuhl bewirkt eine aussen angebrachte Lichtquelle einen geradlinigen Strahlverlauf. In einem beschleunigten Fahrstuhl dagegen läuft das Licht für den mitbewegten Beobachter auf einer Parabel.<sup>5</sup>

Gedankenexperimente dieser Art führten Einstein zur Aussage, dass zwischen Beschleunigung und Gravitation kein wesentlicher Unterschied besteht. Nach Meinung einiger Physiker lässt sich die Gravitation sogar "wegtransformieren". Solche, im Zustand der Euphorik getätigten Aussprüche führten 1920 zu einer ernsthaften Krise der Physik in Deutschland. Philipp Lenard (1862-1947), der Einsteins Relativitätsphysik anfänglich positiv gegenüberstand, bemängelte in Bad Nauheim die neue Sprache und bestand darauf, dass zwischen einer Beschleunigung und der Gravitation ein essentieller Unterschied bestehe. Unmittelbarer Anlass des Streites war eine Frage Lenards an seinen Kontrahenden gewesen auf die Einstein aber nur ungenügend einging.

Wie kommt es, dass nach der Relativitätstheorie nicht unterscheidbar sein soll, ob ihm Fall des gebremsten Eisenbahnzuges der Zug gebremst oder die umgebende Welt gebremst wird?<sup>6</sup>

Lenard hatte sich bereits zwei Jahre zuvor darüber mokiert mit den Worten:

Man lasse nun den gedachten Eisenbahnzug eine deutlich ungleichförmige Bewegung machen. Wenn hierbei durch Trägheitswirkung alles im Zug zu Trümmern geht, während draussen alles unbeschädigt bleibt, so wird, meine ich, kein gesunder Verstand einen anderen Schluss ziehen wollen, als den, dass es eben der Zug war, der mit Ruck seine Bewegung geändert hat, und nicht die Umgebung.<sup>7</sup>

Für Lenard erwies sich das allgemeine Relativitätsprinzip als dem gesunden Verstande abträglich. Als sich Deutschland in den 1920er Jahren mit dem aufkommenden Nationalsozialismus auf neue Gestade zubewegte, wurde Lenard zum Wortführer einer "deutschen Physik". Diese unselige Entwicklung führte schliesslich zur Entfernung aller nichtarischen Personen aus dem Lehrkörper deutscher Universitäten.

---

<sup>5</sup> <http://www.einstein-online.info/vertiefung/AequivalenzLicht>

<sup>6</sup> A. Schirrmacher: *Philipp Lenard – Erinnerungen eines Naturforschers* (Springer).

<sup>7</sup> K. Hentschel: *Interpretationen und Fehlinterpretationen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie durch Zeitgenossen Albert Einsteins* (Birkhäuser).

Als Hilbert von NS-Reichsminister Rust gefragt wurde, ob das mathematische Institut durch den Weggang der Juden und Judenfreunde gelitten habe, gab er zur Antwort:

Jelitten? Dat hat nich jelitten, Herr Minister. Dat jibt es doch janich mehr!<sup>8</sup>

Nachdem sich Einstein aufgrund zunehmender Feindseligkeiten jüdischen Mitbürgern gegenüber zur Emigration gezwungen sah und am *Institute for Advanced Study* in Princeton eine verpflichtungsfreie Anstellung auf Lebenszeit einging, schrieb Lenard mit ersichtlicher Genugtuung im "Völkischen Beobachter" vom 13. Mai 1933, *dass der Relativitätsjude, dessen mathematisch zusammengestoppelte Theorie [...] nun schon allmählich in Stücke zerfällt...* Deutschland verlassen hat. Damit endete ein jahrelanger Kampf des einstigen Symphantisanten auf äusserst beschämende Weise.

Anm. d. Verfassers: Selbst wenn Lenard – wie Hermann Weyl irgendwo schreibt – den Inhalt der ART nicht wirklich verstanden hat, so waren die gestellten Fragen nicht einfach verfehlt. Physikalisch besteht durchaus ein messbarer Unterschied, ob ein Eisenbahnzug gebremst wird oder ob die Umgebung sich verlangsamt. Letztlich berühren solche Problemstellungen erkenntnistheoretische Fragen, die sich dem Leser im Kontext des Konstruktivismus stellen. In naiver Form in etwa bei Fragen, ob der Mond auch existiert, wenn keiner hinschaut. An solchen Fragestellungen war Einstein in Princeton durchaus interessiert wie seine Dialoge mit dem Logiker Kurt Gödel belegen. Bezüglich der ART vermochte sich Einstein dagegen zu keinem Kompromiss bewegen zu lassen. Zuviel stand für ihn offensichtlich auf dem Spiel.

### 1.3 Einsteins variable Lichtgeschwindigkeit

Im Zuge zunehmender Erkenntnis gelangte Einstein zum Schluss, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Funktion des lokalen Gravitationspotentials ist. Seine diesbezügliche Arbeit *Über den Einfluss der Schwerkraft über die Ausbreitung des Lichtes* datiert aus dem Jahre 1911, als sich Einstein für zwei Jahre an der Karls-Universität in Prag aufhielt und mit seiner Theorie der Gravitation kaum voran kam.

$$c = c_0 \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right)$$

Nach langwierigen Überlegungen gelangte Einstein zu seiner Formel für eine variable Lichtgeschwindigkeit und vermerkte dazu:

Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gilt nach dieser Theorie nicht in derjenigen Fassung, wie es der gewöhnlichen Relativitätstheorie zugrunde gelegt zu werden pflegt.

In modernen Lehrbüchern der ART finden wir kaum etwas über diesen Sachverhalt. Stets ist in sakrosankter Manier von der universellen Lichtgeschwindigkeit die Rede. Dass hier etwas nicht stimmt, ergibt sich aus anderen Aussagen Einsteins. In seinem semi-wissenschaftlichen Büchlein *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie* (das eine hohe Auflagenzahl erreichte und bei gravierenden Theoriefehlern problemlos einer Korrektur unterzogen hätte werden können – was offenbar nicht nötig war) schrieb Einstein:

---

<sup>8</sup> Nach Fraenkel 1967, S. 159.

...dass sich Lichtstrahlen in Gravitationsfeldern im allgemeinen krummlinig fortpflanzen. [...] Zweitens aber zeigt diese Konsequenz, dass nach der allgemeinen Relativitätstheorie das schon oft erwähnte Gesetz von der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit, das eine der beiden grundlegenden Annahmen der speziellen Relativitätstheorie bildet, keine unbegrenzte Gültigkeit beanspruchen kann. Eine Krümmung der Lichtstrahlen kann nämlich nur dann eintreten, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes mit dem Orte variiert.<sup>9</sup>

Einstein betont hier explizit, dass das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit für die SRT zwar uneingeschränkte Gültigkeit besitze, für die ART aber nicht länger zutrefte. Das ist kein Widerspruch, sondern eine logische Konsequenz des Fermatschen Prinzips, nach welchem sich Lichtstrahlen stets entlang des Weges mit der minimalen Wirkung ausbreiten und dementsprechend auch ihre Geschwindigkeit verändern können. So wie sich in optisch dichteren Medien die Lichtgeschwindigkeit mit dem Brechungsindex verringert, so nimmt sie auch in Schwerfeldern mit dem Gravitationspotential ab. Lediglich im flachen und materiefreien Raum besitzt sie den bekannten Wert von 299'792'458 Meter/sec.

Die Modernen wollen solche Feststellungen nicht wahrhaben. Vermutlich um sich gegenüber dem wissenschaftlichen Establishment keinen Fauxpas zu leisten, argumentieren sie ausweichend mit der *Koordinatengeschwindigkeit*, die bekanntlich beliebige Werte annehmen kann. Die Lichtgeschwindigkeit als solche bleibt in ihren Augen eine universale Konstante. Dass sie damit dem Urheber der ART widersprechen, scheint sie nicht zu bekümmern. Sie wissen es anscheinend besser.

In vergleichbarer Weise wie Einstein äusserte sich Wolfgang Pauli (1900-1958) in seinem im Jahre 1920 erschienenen Enzyklopädieartikel *Relativitätstheorie*.

Von einer universellen Konstanz der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit kann schon deshalb nicht die Rede sein, weil diese nur in den Galileischen Bezugssystemen stets denselben Wert  $c$  hat.<sup>10</sup>

Das sind doch der deutlichen Worte mehr als genug! Offensichtlich unterschlägt die Wissenschaftsgemeinde ab und zu gewisse Dinge, die sich als unbequem erweisen könnten. Zurecht verweist der Physiker Alexander Unzicker auf diesen Sachverhalt. Selbst wenn wir seinen Schlussfolgerungen nicht immer folgen können, müssen wir ihm in diesem Punkt zustimmen.<sup>11</sup>

## 1.4 Die Entwurf-Theorie

*Grossmann hilf mir, sonst werd ich verrückt!* – Mit diesem Hilfeschrei begann eine fruchtbare Zusammenarbeit zwischen Einstein und seinem einstigen Studienkamerad Marcel Grossmann. Nachdem sich Einstein mittels Grossmanns tatkräftiger Unterstützung sukzessive in die Differentialgeometrie eingearbeitet hatte, verfassten sie eine gemeinsame Arbeit, die als *Entwurf-Theorie*<sup>12</sup> bekannt wurde. Für den mathematischen Teil unterzeichnete Grossmann, für den physikalischen dagegen Einstein.

Einsteins Anforderungen an eine relativistische Gravitationstheorie lauteten:

---

<sup>9</sup> A. Einstein: *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, 23. Auflage (Springer).

<sup>10</sup> W. Pauli: *Relativitätstheorie, neu herausgegeben und kommentiert von Domenico Giulini* (Springer).

<sup>11</sup> A. Unzicker: *Einsteins verlorener Schlüssel* (CreateSpace Independent Publishing Platform).

<sup>12</sup> A. Einstein, M. Grossmann: *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation* (Leipzig und Berlin, 1913).

► Für schwache Felder und langsam bewegte Massen muss die neue Theorie in die Newtonsche Theorie übergehen. In Fachkreisen ist vom "Newtonschen Grenzfall" die Rede, welcher durch die Poissongleichung verkörpert wird, denn diese ist empirisch abgesichert.

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

- Die Erhaltungssätze für Energie und Impuls für Felder und Materie müssen gelten.
- Das Äquivalenzprinzip muss uneingeschränkt gelten.
- Das verallgemeinerte Relativitätsprinzip für beschleunigte Bezugssysteme muss dem Umstand Rechnung tragen, dass Gravitation und Trägheit durch dasselbe metrische Feld  $g_{\mu\nu}$  beschrieben werden.

Folgerichtig begannen Einstein und Grossmann ihre Arbeit mit dem Linienelement ( $ds$ ) – als der kürzesten Verbindung zweier infinitesimal benachbarter Punkte.

Im flachen (euklidischen) Raum hat das Linienelement folgende Form:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

In beliebig gekrümmten Räumen nimmt das Linienelement folgende Gestalt an:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Daraus folgt in tensorieller Notation:

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$$

Mit dem *metrischen Tensor*  $g_{\mu\nu}$  werden sowohl Längen und Winkel als auch der Abstand zweier Punkte auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit definiert. Der Fundamentaltensor besitzt zehn Komponenten, welche die Krümmung der Raumzeit bestimmen.

Wie aus dem sog. "Züricher Notizbuch" hervorgeht, kam Einstein in dieser Arbeit den Feldgleichungen bereits recht nahe. Letzlich aber bestand der angestrebte "mathematische Königsweg" (Hilbert) aus einem Laborieren und Herumtasten. Man probierte den Ricci-Tensor und erweiterte ihn um einen Term (später "Einstein-Tensor" genannt) und verfiel zuletzt in einen abgewandelten "November-Tensor", den man am Aussichtsreichsten befand. Einstein stand kurz vor dem ersehnten Ziel, erkannte aber die tiefere Bedeutung der entwickelten Gleichungen nicht und verließ diesen Pfad, um sich stattdessen auf ermüdende Irrwege zu begeben.

## 1.5 Die Feldgleichungen der Gravitation

Erst nach zwei weiteren Jahren fand Einstein zum ursprünglichen Ansatz zurück und eliminierte die verbliebenen Schwachstellen in seiner Theorie. Grossmann indessen war längst zu seiner früheren Tätigkeit als Mathematiker zurückgekehrt.

Nach über acht Jahren des unablässigen Nachdenkens, im November 1915, war das grosse Werk getan. Die Feldgleichungen der Gravitation lagen nun in korrekter Form vor Augen und die jahrelange Anspannung konnte endlich von der Seele weichen.

In kompakter Tensor-Notation lauten die Feldgleichungen:

$$G_{ik} = kT_{ik}$$



An Sommerfeld schrieb Einstein:

Diese Gleichungen hatte ich schon vor 3 Jahren mit Grossmann erwogen (bis auf das zweite Glied der rechten Seite), war aber damals zu dem Ergebnis gelangt, dass sie nicht Newtons Näherung liefere, was irrtümlich war.

Einstein trieb in einem Meer von Glückseligkeit!

Dem Zauber dieser Theorie wird sich niemand entziehen können, der sie wirklich erfasst hat; sie bedeutet einen wahren Triumph der durch Gauss, Riemann, Ricci und Levi-Civita begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.<sup>13</sup>

Am 25. November reichte Einstein der Preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin *Die Feldgleichungen der Gravitation* zur Publikation ein.

Rückblickend beschrieb Einstein seinen Durchbruch mit den Worten:

Im Lichte bereits erlangter Erkenntnis erscheint das glücklich Erreichte fast wie selbstverständlich, und jeder intelligente Student erfasst es ohne zu grosse Mühe. Aber das ahnungsvolle, Jahre währende Suchen im Dunkeln mit seiner gespannten Sehnsucht, seiner Abwechslung von Zuversicht und Ermattung und seinem endlichen Durchbrechen zur Wahrheit, das kennt nur, wer es selbst erlebt hat.<sup>14</sup>

Einige Jahre später und angeregt durch die Friedmann-Kosmologie erweiterte Einstein die Feldgleichungen durch das "kosmologische Glied" (auch als  $\Lambda$ -Term bezeichnet), um dieses anschliessend zu verwerfen. Gamow zufolge sprach Einstein von der "grössten Eselei" seines Lebens. Erst die moderne Kosmologie mit ihren Quintessenz-Modellen erweckte  $\Lambda$  zu neuem Leben.

## 1.6 Einstein vs. Hilbert

Hilbert lud Einstein im Juli 1915 für einige Tage zu sich nach Göttingen ein, wo Einstein vor erlauchtem Publikum über seine Arbeit berichtete. Hilbert begann sich für Einstein zu erwärmen, weil er seine eigene Arbeit (Die Grundlagen der Physik) als Verschmelzung von Gravitation und Materie mit gemeinsamer Hamilton-Lagrange-Funktion vorantrieb. Einstein erkannte bald einmal, dass Hilbert der Einzige war, der ihn wirklich verstanden hatte. Hilbert wiederum war von Einsteins physikalischen Einsichten fasziniert. Während einer Zwischenphase auf Rügen intensivierte Hilbert seine Bemühungen, nebst der Gravitation auch die Elektrodynamik einzubeziehen und damit zu einer allgemeinen Feldgleichung (Weltformel) vorzudringen. In seinen Gedankengängen wurde er dabei stark von Mie<sup>15</sup> beeinflusst.

Chronologie der Ereignisse:

Den Koryphäen in Berlin konnte Einstein am 4. November 1915 eine "beinahe ausgreifte Theorie" vorstellen. Daraufhin fand Einstein einen schwerwiegenden Überlegungsfehler. Im Verlaufe der nächsten Tage erarbeitete er eine neue Variante mit dem Ricci-Tensor, die er dem Gremium am 11. November vorstellte. Diesmal war das Relativitätsprinzip erstmals vollständig erfüllt, allerdings nur für schwache Gravitationsfelder.

---

<sup>13</sup> A. Einstein: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie* (1915).

<sup>14</sup> A. Pais: *Raffiniert ist der Herrgott* (Spektrum).

<sup>15</sup> Gustav Mie (1868-1957) entwickelte eine Theorie der Materie, in der diese als Knotenstelle (Singularität) des Feldes verstanden wurde.

Hilbert wiederum signalisierte Einstein am 13. November, dass der Königsweg (der axiomatische Weg) gangbar sei; dabei wies er Einstein auf einen Rechenfehler in dessen Tensor-Ausdrücken hin. Einstein zeigt sich an Hilberts Lösung äusserst interessiert:

Ihre Untersuchung interessiert mich gewaltig, zumal ich mir oft schon das Gehirn zermartert habe, um eine Brücke zwischen Gravitation und Elektromagnetik zu schlagen...<sup>16</sup>

Hilbert im Nacken spürend, schwenkte Einstein nun erneut auf den mathematischen Königsweg ein, um sich nochmals mit dem *November-Tensor* aus seinem "Züricher Notizbuch" zu befassen.

Hilbert lud Einstein für den 16. November nach Göttingen zur Präsentation seiner eigenen Arbeit in der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen ein. Einstein aber lehnte ab, indem er Magenbeschwerden als Entschuldigung anführte (solche hatte er damals auch, doch vermutlich fehlte ihm einfach die Zeit). Daraufhin – möglicherweise am 16. November – erhielt Einstein erneute Nachricht von Hilbert. Das Schreiben selbst ging leider verloren. Es ist aber offenkundig, dass Hilbert seine fertigen Gleichungen an Einstein übermittelte, weil dieser am 18. November darauf Bezug nahm mit den Worten:

Das von Ihnen gegebene System stimmt – so weit ich sehe – genau mit dem überein, was ich in den letzten Wochen gefunden und der Akademie überreicht habe. Die Schwierigkeit bestand nicht darin, allgemein kovariante Gleichungen für die  $g_{\mu\nu}$  zu finden; denn dies gelingt leicht mit Hilfe des Riemannschen Tensors.<sup>17</sup>

Ob Einstein zu diesem Zeitpunkt die Bedeutung von Hilberts Herleitung verstanden hatte, darf bezweifelt werden. Wie besessen arbeitete der Physiker anschliessend die sog. Besso-Rechnung nochmals durch, um am 18. November mit dem korrekten Wert des Merkur-Perihels<sup>18</sup> zu triumphieren.

Unverzüglich schrieb Einstein daraufhin an Hilbert und bat diesen im Gegenzug:

Schicken Sie mir bitte, wenn möglich, ein Korrektur-Exemplar Ihrer Untersuchung, um meiner Ungeduld entgegenzukommen.

Am 25. November 1915 sprach Einstein in Berlin über seine heute noch gültigen Feldgleichungen. Seine Arbeit (Die Feldgleichungen der Gravitation) reichte er am selben Tag bei der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin ein. Nun endlich war es getan!

Hilbert hatte seine Arbeit (Die Grundlagen der Physik. Erste Mitteilung) bereits am 20. November bei der Akademie der Wissenschaften in Göttingen zum Druck eingereicht – also deren 5 Tage vor Einstein! Am 6. Dezember erhielt er die Druckfahnen zur Korrektur zurück. Zu diesem Zeitpunkt war die Einsteinsche Arbeit bereits veröffentlicht. Einstein hatte in der Zwischenzeit bereits Abzüge an mehrere Mathematiker und Physiker verschickt. Hilberts Arbeit dagegen wurde erst am 31. März 1916 veröffentlicht.

Im Rückblick stellen sich dem Betrachter gewisse Fragen, darunter: Wer nun ist der eigentliche Entdecker der Feldgleichungen?

Bis 1997 bestand unter Historikern weitgehend Einigkeit darüber, dass Hilbert einige Tage vor

---

<sup>16</sup> D. Wuensch: *Zwei wirkliche Kerle* (Termessos).

<sup>17</sup> Ebenda

<sup>18</sup> Der von den Astronomen damals noch nicht erklärbare Rest der Periheldrehung betrug 43" pro Saeculum.

Einstein die richtigen Feldgleichungen der Gravitation gefunden hatte. Zudem zog man aus dem Antwortschreiben vom 18. November den Schluss, dass Einstein von Hilbert die Feldgleichungen erfahren und anschliessend in seine eigene Arbeit eingebettet hatte. Ein Aufsatz von Corry, Renn und Stachel in der Zeitschrift "Science" stellte diese Sichtweise erstmals in Frage.<sup>19</sup> Nun war es Einstein, der die Feldgleichungen als erster in expliziter Form niedergeschrieben hatte. Ein lückenloser Beweis für diese Revision fehlte aber.

Es muss berücksichtigt werden, dass sich die Vorgehensweisen von Einstein und Hilbert grundlegend unterschieden. Als Mathematiker ging Hilbert im Rahmen der Invariantentheorie von einem Variationsprinzip aus, während Einstein als Physiker auf der Grundlage des Ricci-Kalküls das Relativitätsprinzip zu erfüllen gedachte. Obwohl Hilbert die Feldgleichungen selbst nicht ausformulierte, hatte er doch den richtigen Weg dorthin aufgezeigt.

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu} + \frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

Für einen Mathematiker seines Ranges genügte diese implizite Form der Gleichungen. Der Rest war nur noch "Kleinkram". Um zur endgültigen Form zu gelangen, musste lediglich eine einfache Ableitung vorgenommen werden, deren zweiter Term der "Spurterm" ist.

Die explizite Form, welche mit Einsteins Feldgleichungen äquivalent ist, lautet:

$$\sqrt{g} \left( K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu} \right) + \frac{\partial L\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

Ist das aber wirklich alles? Bei den Fahnenkorrekturen zu Hilberts Arbeit fehlt nämlich ein Stück, gross genug, um die endgültigen Feldgleichungen aufzunehmen. Wer aber hat das Stück abgeschnitten und aus welchem Grund? Die Wissenschaftshistorikerin Daniela Wuensch hat darüber ein interessantes Buch geschrieben<sup>20</sup>, welches die Möglichkeit offen lässt, dass Einstein die richtigen Feldgleichungen – deren Auffinden ihm dermassen Mühe bereitete – bei Hilbert gesehen und in seine eigene Arbeit übernommen hatte. Merkwürdigerweise finden wir bei Einstein selbst nirgends eine Herleitung der Feldgleichungen. Sie tauchen plötzlich wie von Geisterhand geschrieben auf!

In damaliger Notation:

$$R_{im} = -k \left( T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right)$$

Irgendwann muss nach Auffassung des Physikers Friedwardt Winterberg ein Unbekannter den Hilbert'schen Artikel manipuliert haben, um auf diese Weise Einsteins Ruf zu retten. Winterberg machte zudem darauf aufmerksam, dass die Autoren Corry, Renn und Stachel in ihrer Analyse diesen Abschnitt nicht erwähnten, was doch äusserst sonderbar ist. Dieser berechtigte Einwand löste einen unschönen Streit zwischen den Kontrahenden aus, der sogar den Vorwurf des Antisemitismus enthielt.

<sup>19</sup> Jürgen Renn vom Max Planck Institut für Wissenschaftsgeschichte schrieb später ein Buch über Einsteins Werdegang: *Auf den Schultern von Riesen und Zwergen* (Wiley-VCH).

<sup>20</sup> D. Wuensch: *Zwei wirkliche Kerle* (Termessos).

Im Unterschied zu obiger Deutung Winterbergs gab sich Einstein als der Geprellte. An seinen Freund Zangger schrieb er am 26. November 1915:

Die Theorie ist von unvergleichlicher Schönheit. Aber nur ein Kollege hat sie wirklich verstanden, und der eine versucht sie auf geschickte Weise zu "nostrifizieren"...

Einstein stellte demnach Hilbert als Plagiator dar, was völlig absurd anmutet. Die Verstimmung war zum Glück von vorübergehender Natur und konnte bald beigelegt werden.

An Hilbert schrieb Einstein am 20. Dezember 1915 die versöhnlichen Worte:

Es ist zwischen uns eine gewisse Verstimmung gewesen, deren Ursache ich nicht analysieren will. Gegen das damit verbundene Gefühl der Bitterkeit habe ich gekämpft, und zwar mit vollständigem Erfolge. Ich gedenke Ihrer wieder in ungetrübter Freundlichkeit, und bitte Sie, dasselbe bei mir zu versuchen. Es ist objektiv schade, wenn sich zwei wirkliche Kerle, die sich aus dieser schäbigen Welt etwas herausgearbeitet haben, nicht gegenseitig zur Freude gereichen.

Fazit: Allgemeine Feldgleichungen zu finden, die auch den Elektromagnetismus miteinbezogen, bildete das treibende Motiv für Hilberts Axiomatisierung der Physik. Dieses ergeizige Vorhaben wurde von dem aus Oberschlesien stammenden Mathematiker Theodor Kaluza verwirklicht, indem dieser eine vierte Raumdimension in die Debatte einführte und dadurch genügend Platz für den Elektromagnetismus bekam.<sup>21</sup>

Als Einstein von Kaluzas Theorie erfuhr, schrieb er diesem:

Ich habe grossen Respekt vor der Schönheit und Kühnheit Ihres Gedankens...

Einstein blieb Kaluza gegenüber zwar freundlich, aber zugleich distanziert eingestellt und suchte über dreissig Jahre lang vergeblich nach einer einheitlichen Feldtheorie. Darüber könnte gut und gerne ein separater Aufsatz geschrieben werden.

An weiterführenden Ansätzen für eine Vereinheitlichung fehlt es nicht. Die gegenwärtig aussichtsreichsten Kandidaten (M-Theorie und Loop-Quantengravitation) haben den gesuchten Durchbruch bisher aber noch nicht erbracht.

---

<sup>21</sup> D. Wuensch: Der Erfinder der 5. Dimension (Termessos).

## 2 Die gekrümmte Raumzeit

### 2.1 Die Feldgleichungen

Die Einsteinschen Feldgleichungen – geschrieben in tensorieller Notation – lauten:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = k T_{ik}$$

► Die rechte Seite der Gleichung ist Quelle des Feldes und damit Quellterm von Energie, Impuls und Materie.

- $T_{ik}$  ist der Energie-Impuls-Tensor (zuweilen auch "Stresstensor" genannt)
- $k$  ist der Einsteinsche Proportionalitätsfaktor:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

- Aufgrund der Erhaltungssätze soll die Divergenz von  $T_{ik}$  lokal verschwinden:

$$\nabla \cdot T_{ik} = 0$$

► Die linke Seite der Gleichung bestimmt die Krümmung des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums.

- $R_{ik}$  wird als Ricci-Tensor bezeichnet
- $g_{ik}$  ist der Fundamentaltensor des metrischen Feldes
- $R$  ist der durch Verjüngung aus dem Ricci-Tensor hervorgegangene Ricci-Skalar

Manchmal wird die linke Seite im Einstein-Tensor  $G_{ik}$  zusammengefasst.

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$$

Aufgrund der Proportionalität mit der rechten Seite handelt es sich um einen symmetrischen Tensor.

$$G_{ik} = G_{ki}$$

Ferner soll gelten:

- Im Vakuum wird  $G_{ik} = 0$
- Auch für  $G_{ik}$  wird Divergenzfreiheit gefordert:

$$\nabla \cdot G_{ik} = 0$$

Anm. d. Verfassers: Für einen lediglich mit Schulmathematik ausgestatteten Leser scheint es sich auf den ersten Blick nicht um besonders schwierige Gleichungen zu handeln. Das ändert sich aber bei vertiefter Betrachtung, denn in realiter handelt es sich bei den Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation um ein System von zehn nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die aus dem metrischen Tensor hervorgehen. Lösungen der Feldgleichungen gibt es daher unzählige, aber nicht alle sind physikalisch auch sinnvoll. Die erste exakte Lösung wurde vom Astronom Karl Schwarzschild (1873-1916) inmitten des Ersten Weltkrieges gefunden. Weitere Lösungen stammen

von Kerr, Kruskal und Gödel.

## 2.2 Uhren und Maßstäbe

Bedeutsam ist, dass Uhren und Maßstäbe auch im Rahmen der ART keine absoluten Aussagen über Zeit und Raum erlauben. Zeit (Uhrengang) und Maßstab (Einheitslänge) sind vom lokalen Gravitationspotential abhängige Größen.

► Verschiebt man einen im Unendlichen befindlichen Maßstab ( $L_0$ ) im Schwerfeld einer Zentralmasse, so schrumpft der Maßstab in radialer Richtung.

$$L' = \left(1 - \frac{\Delta U}{c^2}\right) L_0$$

Eine zentrale Funktion kommt hier dem Schwarzschildradius ( $\mathfrak{R}$ ) zu:

$$\mathfrak{R} = \frac{2GM}{c^2}$$

Es gilt:

$$L' = \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{2R}\right) L_0 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 R}\right) L_0$$

► Gegenüber einer Normaluhr ( $T_0$ ) geht eine im Schwerfeld befindliche Uhr langsamer.

$$T' = \left(1 - \frac{\Delta U}{c^2}\right) T_0$$

Es gilt:

$$T' = \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{2R}\right) T_0 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 R}\right) T_0$$

Das Gesagte lässt zwei Interpretationen zu:

a) Das Kontinuum ist euklidisch.

Maßstäbe verkürzen sich im Gravitationspotential real und Uhren gehen langsamer. Die Metrik ist demzufolge an das lokale Gravitationspotential gebunden. Weshalb sich Maßstäbe unter dem Einfluss eines Schwerfeldes verkürzen, bleibt ungeklärt. Offensichtlich ist nur, dass ein Skalenfaktor existiert, der die effektive Länge eines Maßstabes bestimmt. Was für Maßstäbe gilt, gilt letztlich für den Raum selbst (Abb. 2-1a).

b) Das Kontinuum ist nichteuklidisch.

Maßstäbe wirken infolge der Raumkrümmung kontrahiert und Uhren gehen langsamer. Um den Abstand zweier Punkte im gekrümmten Raum zu bestimmen, benötigt der lokale Beobachter mehr Maßstäbe, als zunächst angenommen. Für den fernen Beobachter wirkt sich dies so aus, also ob die Maßstäbe kürzer geworden sind (Abb. 2-1b).

Welcher Interpretation einer zustimmt, ist naturgemäß eine Sache des persönlichen Weltbildes. Der mathematische Formalismus bleibt derselbe. Eines ist immerhin evident: In der isotropen Schwarzschild-Metrik besitzt das Licht aus globaler Perspektive eine geringere Geschwindigkeit als in der Minkowski-Metrik. Für den fernen Beobachter wirkt die Gravitation wie eine optische

Linse, deren Brechungsindex die Lichtgeschwindigkeit bestimmt. Global erweist sich die Lichtgeschwindigkeit als eine Funktion des Gravitationspotentials. Je stärker das Feld, desto langsamer läuft das Licht! Für den lokalen Beobachter dagegen erweist sich die Lichtgeschwindigkeit an jedem Ort als konstant ( $c = \text{const}$ ).<sup>22</sup>

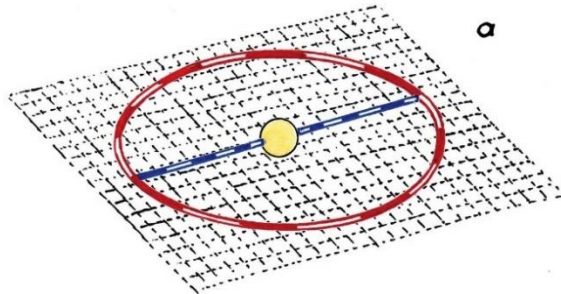


Abb. 2-1a

Euklidische Interpretation: Der Raum ist eben, Maßstäbe schrumpfen<sup>23</sup>

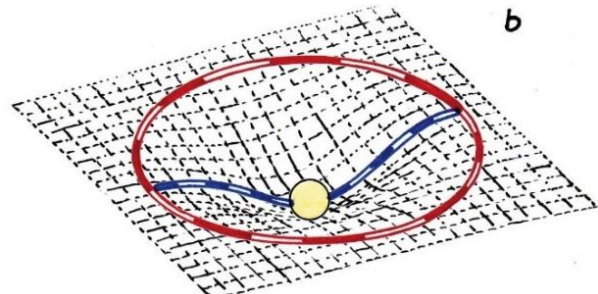


Abb. 2-1b

Nichteuklidische Interpretation: Der Raum ist gekrümmt, alle Maßstäbe sind gleich lang<sup>24</sup>

(die Vorstellung des starren Körpers muss in der ART aufgegeben werden)

## 2.3 Empirische Nachweise der Einsteinschen Gravitationstheorie

Die vier klassischen Experimente zur Verifizierung der allgemein-relativistischen Voraussagen befassen sich mit der Periheldrehung des Merkur, der Lichtablenkung am Sonnenrand, der Rotverschiebung und der Laufzeitverzögerung elektromagnetischer Wellen.

### 2.3.1 Die Periheldrehung

Für die Astronomen des 19. Jahrhunderts blieb ein kleiner Rest der Periheldrehung des Merkurs ein unlösbares Rätsel.

Durch den Einfluss fremder Himmelskörper verschiebt sich die Apsidenlinie einer Bahnellipse

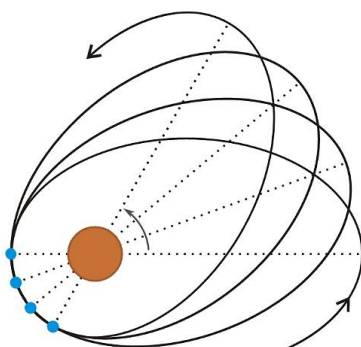


Abb. 2-2

Periheldrehung<sup>25</sup>

kontinuierlich. Unter der Apsidenlinie versteht man die Verbindungsgerade zwischen dem sonnennächsten Punkt (Perihel) und dem sonnenfernsten Punkt (Aphel) eines Planeten. Durch die fortschreitende Drehung der Apsidenlinie rotiert auch die Bahnellipse des Planeten; daraus resultiert eine rosettenförmige Bahnkurve im Inertialraum.

Es ist auch von einer *Periheldrehung* die Rede (Abb. 2-2). Der grösste Anteil der Periheldrehung beim Merkur konnte durch den Einfluss der übrigen Planeten (insbesondere Venus und Jupiter) und durch die Abplattung der Sonne erklärt werden. Der

verbliebene Rest von  $\approx 43''$  pro Jahrhundert dagegen entzog sich einer plausiblen Erklärung.

<sup>22</sup> S. Boblest, Th. Müller, G. Wunner: *Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie* (Springer Spektrum).

<sup>23</sup> Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

<sup>24</sup> Ebenda

<sup>25</sup> Bildquelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Apsidendrehung>

Urban Le Verrier's Beobachtung von Merkurdurchgängen Mitte des 19. Jahrhunderts ergab, dass die Periheldrehung des Merkur etwas stärker ausfiel, als erwartet. Le Verrier vermutete als Ursache der Störung einen noch unbekanntem Planeten auf einer zwischen Merkur und Sonne umlaufenden Bahn. Der hypothetische Planet erhielt den Namen Vulkan, entzog sich aber jeglicher Entdeckung, so dass diese Hypothese schliesslich aufgegeben wurde. Andere verdächtigten den für das Zodiaklicht verantwortlichen Staubbügel als Ursache der Periheldrehung.

Levy (1890), Newcomb (1895) und Gerber (1898) betrachteten das Newtonsche Gravitationsgesetz als revisionsbedürftig. Newcomb war der Ansicht, dass die zwischen zwei Massen wirkende Kraft nicht exakt mit dem reziproken Radiusquadrat abnimmt, sondern um einen bestimmten Betrag davon abweicht. Gerbers Formel der Periheldrehung<sup>26</sup> glich formal der später von Einstein publizierten Gleichung, die zugrundegelegten Kraftgesetze erwiesen sich aber als falsch. Erst die Einsteinsche Begründung des Merkurperihels auf der Basis der Allgemeinen Relativitätstheorie vermochte sich schliesslich durchzusetzen.

Einsteins Formel für die relativistisch bedingte Periheldrehung lautet:

$$\Delta\varphi = 3\pi \frac{\mathfrak{R}}{a(1 - \varepsilon^2)}$$

$\Delta\varphi$	restliche Verschiebung pro Umlauf im Bogenmass
$\mathfrak{R}$	Schwarzschildradius der Sonne
$a$	Länge der grossen Halbachse der Planetenbahn
$\varepsilon$	numerische Exzentrizität

Die Ursache des säkularen Restbetrages der Periheldrehung liegt in einer geringfügigen Abweichung des relativistisch behandelten Gravitationsfeldes vom streng invers-quadratischen Verhalten nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz.

### 2.3.2 Lichtablenkung im Zentralfeld

Wie bereits angedeutet, macht sich in Sonnennähe eine Beugung der Lichtstrahlen bemerkbar, die sich mit der Brechung in einer Sammellinse vergleichen lässt. In der Optik ist diesbezüglich vom *Fermatschen Prinzip* die Rede. Diesem Prinzip zufolge nimmt das Licht stets den Weg mit der kürzesten Laufzeit. Übertragen auf die Allgemeine Relativitätstheorie resultieren Bahnen von Lichtstrahlen aus einer Extremalbedingung der Lagrange-Funktion.

$$\delta \int dt = 0$$

Der Ablenkungswinkel beträgt:

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 R}$$

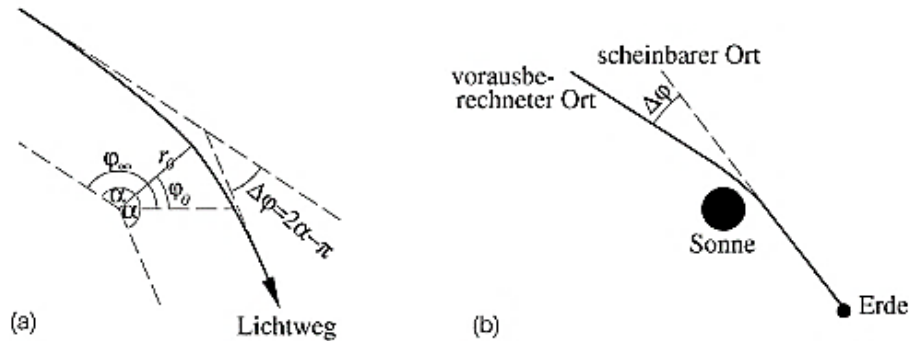
Sterne, die sich am Himmel in Sonnennähe befinden, erscheinen aufgrund der Lichtablenkung etwas weiter von der Sonne entfernt, als es ihre tatsächliche Position erlaubt (Abb. 2-3). Normalerweise entzieht sich dieses Phänomen unserer Wahrnehmung. Anlässlich einer totalen Sonnenfinsternis lässt es sich aber mittels fotografischer Aufnahmen festhalten.

Erstmals bestätigt wurde die gravitative Lichtablenkung Ende Mai 1919 durch die Aufnahmen

<sup>26</sup> P. Gerber: *Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation* (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1898).

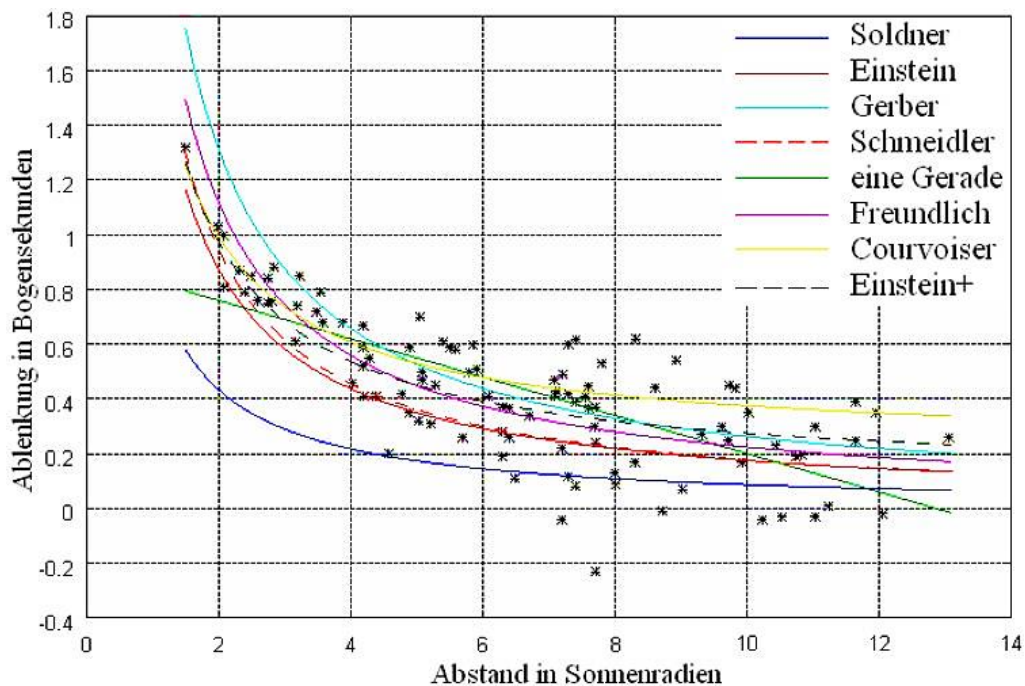


zweier britischer Expeditionen. Allerdings enthalten die fotografischen Platten systematische Fehler, die bei der Auswertung berücksichtigt werden müssen. Einspruch gegen Eddingtons Erklärung zugunsten der ART erfolgte von verschiedener Seite. Nicht gänzlich zu unrecht bezweifelte Ludwik Silberstein die gezogenen Schlussfolgerungen.



**Abb. 2-3**  
Lichtablenkung am Sonnenrand<sup>27</sup>

Die realen Daten streuen stark um den theoretischen Wert von 1,75". Selbst spätere Messungen ergaben kein einheitliches Bild (Abb. 2-4). Für Einstein aber erwies sich das Unternehmen als bahnbrechender Erfolg. Bis dahin hatte seine Theorie der Gravitation ein Mauerblümchendasein gefristet, nun aber wurde sie und deren Erzeuger weltweit bekannt.



**Abb. 2-4**  
Resultate unterschiedlicher Expeditionen<sup>28</sup>

Eigentlich ist die grosse Streuung in den Daten der solaren Lichtablenkung nicht erstaunlich, weil der Einfluss der Sonnenkorona und auch interplanetarischer Plasmazonen nach unserem Dafür-

<sup>27</sup> E. Rebhan: *Theoretische Physik. Relativitätstheorie und Kosmologie* (Spektrum).

<sup>28</sup> Bildquelle: [http://walter-orlov.wg.am/lichtablenkung\\_an\\_der\\_sonne\\_beweist\\_keine\\_theorie](http://walter-orlov.wg.am/lichtablenkung_an_der_sonne_beweist_keine_theorie)

halten viel zu wenig berücksichtigt wurde.

Anm. d. Verfassers: Um die von Einstein vorausgesagte Lichtablenkung zu überprüfen, wurden im Jahr 1919 unter dem Patronat der "Royal Astronomical Society" und der "Royal Society" zwei Expeditionen durchgeführt, die anlässlich einer im Mai desselben Jahres zu erwartenden Sonnenfinsternis fotografische Aufnahmen der verdunkelten Sonne zu erstellen hatten. Der britische Astronom Arthur Stanley Eddington (1882-1944) begab sich mit seinem Team auf die Insel Principe vor Westafrika, während das zweite Team nach Sobral im Norden Brasiliens aufbrach. Eddingtons Absicht bestand darin, die postulierte Ablenkung am Beispiel der Hyaden (einem Sternhaufen im Sternbild Stier) zu zeigen. Sollte Einsteins Theorie zutreffen, so müsste sich die Position der Sterne während der Verfinsternung verändern. Am 29. Mai 1919 war es endlich soweit. Am Morgen bedeckten schwere Wolken den Himmel über dem Golf von Guinea. Kurz vor der Eklipse aber klarte der Himmel auf und die Teleskope richteten sich auf das Ereignis. Es wurden 16 fotografische Platten belichtet, aber nur zwei davon waren zu gebrauchen. Dem Team von Andrew Crommelin in Sobral war ein grösserer Erfolg beschieden, weil von insgesamt 19 Aufnahmen acht brauchbare gemacht wurden.

Nach der Auswertung der Platten in England wurde das Ergebnis auf einer Anfang September 1919 in Bournemouth stattfindenden Tagung bekannt gemacht. Die Ablenkung des Sternenlichtes in Sonnennähe lag zwischen 1,61 und 1,98 Bogensekunden; damit hatte die Allgemeine Relativitätstheorie ihren ersten Test erfolgreich bestanden.<sup>29</sup>

Einsteins Zürcher Kollegen zeigten sich als geborene Lyriker:

*Alle Zweifel sind entschwunden,  
Endlich ist es nun gefunden:  
Das Licht, das läuft natürlich krumm  
Zu Einsteins allergrösstem Ruhm!*<sup>30</sup>

Den eigentlichen Durchbruch führten die Tageszeitungen herbei. In der Londoner Times erschien am 7. November 1919 ein Artikel mit den einleitenden Worten: *Wissenschaftliche Revolution. Neue Theorie des Universums. Newtons Vorstellung gestürzt.*

Die New York Times schrieb am 10. November auf ihrer Titelseite: *Lichter am Himmel alle schief.*

In Deutschland war man zurückhaltender. Erst am 14. Dezember 1919 brachte die Berliner Illustrierte Zeitung nebst einem Foto Einsteins einen Artikel mit der Überschrift: *Eine neue Grösse der Weltgeschichte: Albert Einstein, dessen Forschungen eine völlige Umwälzung unserer Naturbetrachtung bedeuten und den Erkenntnissen eines Kopernikus, Kepler und Newton gleichwertig sind.*

Einstein war nicht der erste, der dem Licht solche "krummen Eigenschaften" zuschrieb. Bereits 1783 behauptete der englische Naturphilosoph John Michell – sich auf die Newtonsche Korpuskulartheorie berufend –, dass das Licht auf seinem Wege von den Sternen beeinflusst werde. In seiner Vorstellung beschrieb er einen Stern mit einer dermassen grossen Masse, dass dessen Licht dem Schwerfeld nicht länger entkommen konnte. Im Prinzip hatte Michell mit seinem "dunklen Stern" ein *Black hole* vorgeweggenommen.

Im 18. Jahrhundert berechnete der französische Mathematiker und Himmelsmechaniker Pierre-Simon Laplace die Grösse eines Körpers, der dem Licht keine Möglichkeit zur Flucht bot. Er fand, dass die gesamte Sonnenmasse auf einer Kugel mit einem Durchmesser von 6 km konzentriert sein müsste, um das Licht festzuhalten.

<sup>29</sup> P. G. Ferreira: Die perfekte Theorie (C. H. Beck).

<sup>30</sup> N. Straumann: *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik* (Springer).

1804 veröffentlichte Johann Georg von Soldner einen Aufsatz mit dem Titel: *Die Ablenkung eines Lichtstrahls von einer geradlinigen Bewegung durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbei geht*. Soldner kam aufgrund des Newtonschen Gravitationsgesetzes auf einen Winkel von 0,84 Bogensekunden.

*Wenn also ein Lichtstral an einem Weltkörper vorbeigeht, so wird er durch die Attraktion desselben genötigt, anstatt in der geraden Richtung fortzugehen, eine Hyperbel zu beschreiben, deren konkave Seite gegen den anziehenden Körper gerichtet ist...*<sup>31</sup>

Albert Einstein befasste sich seit 1911 mit der Lichtablenkung im Zentralfeld grosser Massen und kam zunächst auf einen Wert von 0,83 Bogensekunden (was praktisch mit Soldners Berechnung übereinstimmte). Dieser Wert war aber noch nicht richtig, weil die diesbezüglichen Überlegungen unvollständig waren und einer nachhaltigen Korrektur bedurften.

Einstein hatte Glück im Unglück, weil mehrere Versuche, die Lichtablenkung am Sonnenrand zu überprüfen, buchstäblich ins Wasser fielen. Eine 1912 nach Brasilien geplante Expedition konnte wegen des anhaltend schlechten Wetters nicht durchgeführt werden. Eine im August 1914, drei Wochen nach Ausbruch des Ersten Weltkrieges, über Russland zu erwartende Sonnenfinsternis vermochte auch nichts beizutragen. Das deutsche – von Erwin Finlay Freundlich angeführte – Expeditionsteam wurde von den Russen gefangen genommen, während die südlich von Kiew stationierten Amerikaner – unter ihnen der Astronom William Campbell – lediglich einen von Wolken bedeckten Himmel erblickten.

Nach diversen Irrwegen korrigierte Einstein im November 1915 sein mit Mängeln behaftetes Resultat und kam auf einen theoretisch zu erwartenden Wert von 1,75 Bogensekunden.

### 2.3.3 Rotverschiebung im Schwerefeld

Um ein Gravitationsfeld zu verlassen, wird Energie benötigt. Bei Photonen (Lichtquanten) macht sich dies wegen  $E = h \cdot \nu$  in einer Abnahme der Frequenz bemerkbar. Eine kleinere Frequenz ist beim sichtbaren Licht gleichbedeutend mit einer Verschiebung gegen den roten Bereich des Spektrums, so dass von einer "Rotverschiebung" die Rede ist. Umgekehrt gewinnt ein Photon an Energie, wenn es sich auf die Zentralmasse zubewegt. Dieses Phänomen wird deshalb als "Blauverschiebung" bezeichnet.

Bereits Schwarzschild versuchte seit 1913 eine Rotverschiebung von Absorptionslinien im Sonnenspektrum nachzuweisen. Einstein hoffte auf ein Gelingen dieses Vorhabens, doch der Nachweis gelang erst 1960 durch die Physiker Pound und Rebka mit einer ausgeklügelten Apparatur (Abb. 2-5). Wenige Jahre später vermochten Pound und Snider die Genauigkeit auf 1 % zu erhöhen.

Für den Pound-Rebka-Versuch dienten die extrem scharfen Spektrallinien radioaktiver Kobaltisotope. Durch die Einbettung der Co-Atome in das kubische Gitter von Eisenatomen erfolgte eine nahezu rückstossfreie Emission und Absorption der Gammstrahlung (ein durch den *Mössbauer-effekt* bedingtes Phänomen). Eine Höhendifferenz von rund 22,6 Meter im Jefferson-Turm der Harvard University genügte bereits, um Sender und Empfänger so zu verstimmen, dass diese nicht länger in Resonanz zueinander standen. Mittels einer hydraulischen Vorrichtung wurde der Absorber langsam bewegt, bis sich aufgrund des Dopplereffektes erneute Resonanz einstellte. Die für eine maximale Resonanz erforderliche Vorschubgeschwindigkeit diente als Maß für die

---

<sup>31</sup> Joh. Soldner: *Ueber die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung* (Berlin, 1801).

Frequenzshift. Ausserdem wurden akkustische Wandler montiert, welche die Quelle in eine oszillierende Bewegung versetzten.<sup>32</sup>

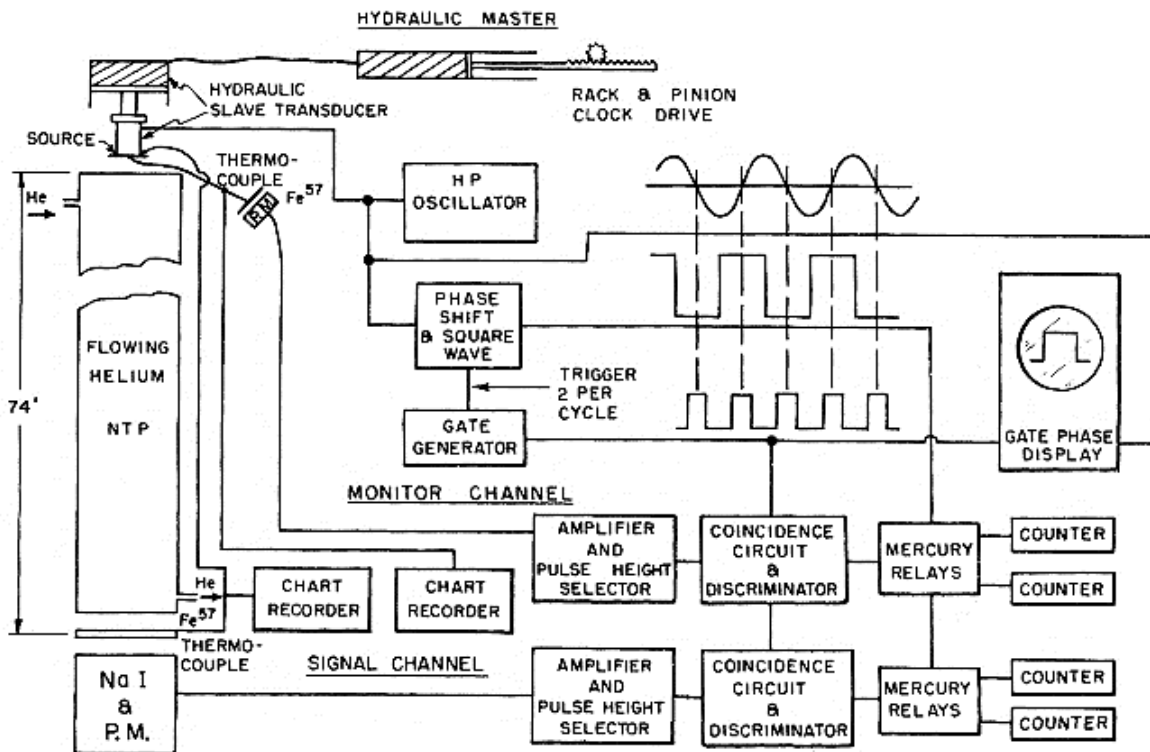


Abb. 2-5

Pound-Apparat zum Nachweis der gravitativen Rotverschiebung

### 2.3.4 Laufzeitverzögerung (Shapiro-delay)

An der Venus reflektierte Radarsignale, die nahe der Sonne verlaufen, kommen verzögert zur Erde zurück (Abb. 2-6). Die Verzögerung beträgt ca. 200 Mikrosekunden. Um das Dogma der C-Konstanz nicht aufgeben zu müssen, sprechen einige Physiker von der "Koordinatengeschwindigkeit" des Lichtes.

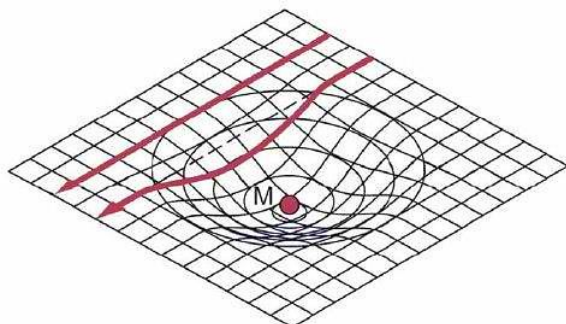


Abb. 2-6

Shapiro-Effekt<sup>33</sup>

Irwin Shapiro hat diesen Effekt 1964 vorausgesagt. Der Nachweis gelang 1967 mit Radarsignalen. Spätere Versuche mit Raumsonden (Mariner, Viking) erhöhten die Genauigkeit signifikant. Die bisher genaueste Messung erfolgte

2002 anlässlich der Konjunktion der Raumsonde Cassini mit der Sonne.

Benjamin Knispel vom Albert-Einstein-Institut für Gravitationsphysik in Hannover äusserte sich zur Laufzeitverzögerung (Shapiro-delay) wie folgt:

Man sendet ein Radarsignal zu Merkur oder Venus, während die sich auf der erdabgewandten Seite

<sup>32</sup> R. V. Pound, G. A. Rebka: *Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance* (1959).

<sup>33</sup> Bildquelle: <https://www.researchgate.net/>

der Sonne befinden. Dann läuft dieses Radarsignal einmal an der Sonne vorbei auf dem Weg zum Merkur und auf dem Rückweg nochmal, durchläuft also zweimal sozusagen den Schwerfeldtrichter der Sonne in der Raumzeit. Und was die allgemeine Relativitätstheorie dann vorhersagt ist, dass in dem Schwerfeld, in der Nähe der Sonne sozusagen, das Licht ein bisschen langsamer läuft. Es braucht also etwas länger als wenn die Sonne nicht da wäre.

Erwähnenswert ist, dass der Shapiro-Effekt mit zunehmendem Abstand ( $R$ ) in Bezug auf die Zentralmasse nur langsam abnimmt. Während die Lichtablenkung mit  $1/R$  abnimmt, enthält die Abnahme der Laufzeitverzögerung zusätzlich einen logarithmischen Term. Im Abstand von 100 Sonnenradien bspw. verringert sich die Lichtablenkung auf 1 %, die Laufzeitverzögerung dagegen lediglich auf 21 % des maximalen Effektes am Sonnenrand. Man spricht daher von einem "Long-range-effect".

Mit der Skizzierung des letzten der vier klassischen Test's der ART sind unsere Betrachtungen zur Genealogie der Allgemeinen Relativitätstheorie beendet.

## Literatur

- Albert Einstein: Grundzüge der Relativitätstheorie (Springer)
- Wolfgang Pauli: Relativitätstheorie (Springer)
- Wolfgang Rindler: Relativitätstheorie (Wiley-VCH)
- Ray d'Inverno: Einführung in die Relativitätstheorie (Wiley-VCH)
- Holger Göbel: Gravitation und Relativität (De Gruyter)