1 Differentialrechnung

Im ersten Teil der "Analysis für Techniker" haben wir das Prinzipielle der Infinitesimalrechnung behandelt. Nur mit diesem Grundwissen allein sind wir aber noch nicht in der Lage, beliebige Aufgaben erfolgreich zu lösen. Im zweiten Teil werden wir deshalb einige Regeln betrachten, die es beim Differenzieren und Integrieren zu beachten gilt.

1.1 Ableitungsregeln

Die Bestimmung der Ableitung einer differenzierbaren Funktion, kann bei algorithmischer Verwendung der Ableitungsregeln immer gelöst werden.

1.1.1 Summenregel

Die Ableitung einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der einzelnen Ableitungen.

$$f(x) = u(x) + v(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

1.1.2 Produktregel

Für die Ableitung eines Produktes gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

1.1.3 Quotientenregel

Für die Ableitung eines Quotienten gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

1.1.4 Potenzregel

Bei der Ableitung einer Potenz wird der Exponent um 1 erniedrigt und der ursprünglich Exponent als Faktor vor die Potenz gestellt.

$$f(x) = x^r \qquad \rightarrow \quad f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

$$f(x) = x^3 + x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 2x$$

1.1.5 Kettenregel

Ist eine Funktion f von g abhängig (wobei g eine Funktion von x ist), so spricht man von einer mittelbaren Funktion; für die Ableitung gilt dann:

$$f(x) = f[g(x)] \quad \rightarrow \quad f'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$$

Zuerst muss man f nach g ableiten, danach g nach x, um dann beide Ableitungen miteinander zu multiplizieren.

1.1.6 Additive Konstante

Eine additive Konstante fällt beim Differenzieren weg.

$f(x) = a + x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x$

1.1.7 Konstanter Faktor

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

$y = m \cdot x^3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = m \cdot 3x^2$

Es gibt noch weitere Regeln und Mechanismen, auf die wir hier aber nicht eingehen. Wer sich dafür interessiert, sei auf die Fachliteratur verwiesen.

1.2 Ableitung elementarer Funktionen

Tabelle 1: Elementare Ableitungen von Funktionen		
Funktion f(x)	Ableitung der Funktion f'(x)	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	
$f(x) = c = const.$	$f'(x) = 0$	Eine Paralle zur Abszisse besitzt keine Steigung.
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	Die e-Funktion ist die einzige Funktion, die beim Differenzieren unverändert bleibt.[1]
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	
$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$	

Obige Beispiele sind nur ein Auszug aus der Fülle der differenzierbaren Funktionen.

[1] Die simple Gleichung f(x) = f'(x) ist eine Differentialgleichung, weil in ihr sowohl eine Funktion als auch deren Ableitung vorkommen.

2 Integralrechnung

2.1 Verifizierungsprinzip

Bestehen Zweifel an einer Lösung, hilft oft das *Verifizierungsprinzip*. Darunter versteht man einen Rückführtest: Wenn nämlich die Ableitung einer Stammfunktion zur ursprünglichen Funktion führt, so wurde beim Integrieren die richtige Stammfunktion gefunden.

$f(x) = 3x^2 \;\; ; \;\; F(x) = x^3 \rightarrow F'(x^3) = f(x) = 3x^2$

Die gefundene Stammfunktion für f(x) ist offensichtlich die richtige.

2.2 Integrationsregeln

Auch beim Integrieren sind verschiedene Regeln und Verfahren für uns von Nutzen. Im Unterschied zum Differenzieren, wo eine Lösung immer gefunden werden kann, ist dies beim Integrieren aber nicht immer möglich ist.

2.2.1 Summenregel

Besteht der Integrand aus einer Summe mehrerer Funktion, so lassen sich die Funktionen auch einzeln integrieren.

$$F'(x) = f(x) + g(x) \quad \rightarrow \quad F = \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2.2.2 Potenzregel

Bei der Aufleitung einer Potenz wird der Exponent um 1 erhöht und der Zahlenwert des neuen Exponenten als reziproker Faktor vor die Potenz gestellt.

$$F'(x) = x^r \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1}$$

$$F'(x) = x^3 \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{4} \cdot x^4$$

2.2.3 Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Integrieren erhalten und kann vor das Integral gezogen werden.

$$F'(x) = f(x) = kx \quad \rightarrow \quad F = \int f(x)dx = \int k \cdot (x)dx = k \int (x)dx = k \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{k}{2}x^2$$

2.3 Integrationsmethoden

Manchmal gibt es keinen direkten Weg zum Stammintegral. Für solche Fälle muss die Lösung über einen Umweg gesucht werden.

2.3.1 Partielle Integration

Die partielle Integration ist das inverse Pendant zur Produktregel bei der Differentiation.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u(x)$$

In abgekürzter Notation:

$f'(x) = (uv)'$ $\qquad$ $(uv)' = u'v + uv'$ $\qquad$ Nach Umformung erhalten wir: $uv' = (uv)' - u'v$

Anschliessend integrieren wir den bei der Umformung erhaltenen Term.

$$\int [(uv)' - (u'v)]dx = \int (uv)'dx - (u'v)dx = uv - \int (u'v)dx \qquad (2.1)$$

a) Integrierbeispiel 1:

Zu lösen sei das Integral: $\int xe^x dx$

Wir setzen: $u = x \quad ; \quad v' = e^x$

Somit ist: $u' = 1 \quad ; \quad v = e^x$

Durch Einsetzen in Gleichung (2.1) erhalten wir:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

b) Integrierbeispiel 2:

Zu lösen sei das Integral $\int sin^2 x\, dx$

Wir setzen: $u = \sin x \quad ; \quad v' = \sin x$

Somit ist: $u' = \cos x \quad ; \quad v = -\cos x$

$$\int sin^2 x\, dx = -\cos x \sin x + \int cos^2 x\, dx$$

Für $\cos^2$ setzen wir ein: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Daraus folgt:

$$\int sin^2 x\, dx = -\cos x \sin x + \int (1 - sin^2 x)dx$$

$$\int sin^2 x\, dx = -\cos x \sin x + x - \int sin^2 x\, dx$$

Abschliessend addieren wir auf beiden Seiten $\sin^2 x\, dx$ und dividieren durch 2; damit erhalten wir als Endresultat:

$$\int sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{x}{2} + C$$

Es liegt auf der Hand, dass nur durch häufiges Üben die für den Erfolg nötige Reife beim Integrieren erworben werden kann. Adäquates gilt natürlich auch für das Differenzieren. Im Rapp (Mathematik für die Fachschule Technik) sind viele Übungsaufgaben enthalten. Beim Kusch (Differentialrechnung Bd. 3, Integralrechnung Bd. 4) gibt es für jeden Band eine separate

Aufgabensammlungen mit Lösungen.

2.3.2 Integration durch Substitution

Was beim Ableiten als *Kettenregel* bezeichnet wird, ist beim Integrieren die *Subsitution*. Dieses Verfahren wird dann angewandt, wenn es sich um verschachtelte (verkettete) Funktionen handelt.

$$\begin{array}{l} F'(x) = f(x) \cdot g(x) \\ F'(x) = 2x \cdot (x^2+1)^3 \end{array} \quad \rightarrow \quad F = \int [f(x) \cdot g(x)] dx$$

Vorgehensweise beim Integrieren durch Substitution:

1) Die "innere Funktion" $(x^2 + 1)$ ersetzen (substituieren) wir durch den Term u(x).

2) Zunächst ist die Ableitung von u(x) und danach die Auflösung nach dx durchzuführen.

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x} = \frac{1}{2x} \cdot du$$

3) Nun ersetzen wir im Integranden die innere Funktion durch u(x) sowie dx durch den im vorherigen Schritt gewonnenen Ausdruck für dx.

$$F = \int [2x \cdot (x^2+1)^2 dx] \qquad F = \int (2x \cdot u^2) \cdot \frac{1}{2x} \cdot du = u^2 \cdot du \qquad F = u^2$$

4) Nun ist die "Rücksubstitution" durchzuführen und der Term u(x) durch die ursprüngliche innere Funktion zu ersetzen.

$$F = u(x)^2 = \frac{1}{3} \cdot (x^2+1)^2 \qquad F = \frac{1}{3} \cdot x^4 + 2x^2 + 1$$

Auch bei der Integration gilt das bereits für die Differentiation Gesagte, dass es noch weitere Regeln gibt, auf die wir aber nicht eintreten. Ferner gibt es auch Lösungen, die nur durch Erfahrung und Intuition gefunden werden. Wer tiefer gehen möchte, konsultiere die Fachliteratur.

3 Analysis in Physik und Technik

3.1 Kraft und Impuls

3.1.1 Kraftstoss

Eines der wichtigsten Prinzipien in der Physik ist der Impulserhaltungssatz, gemäss dem sich der Gesamtimpuls eines Systems und seiner Umgebung nicht ändert. Verändert sich ein einzelner Impuls, so muss sich daher auch ein anderer Impuls (oder mehrere) verändern.

Die Erhaltung des Impulses durch Impulsübertragung ist sehr schön beim Kugelpendel ersichtlich. Die Impulsänderung Δp bei Stossprozessen ist gleich dem Integral für den "Kraftstoss".

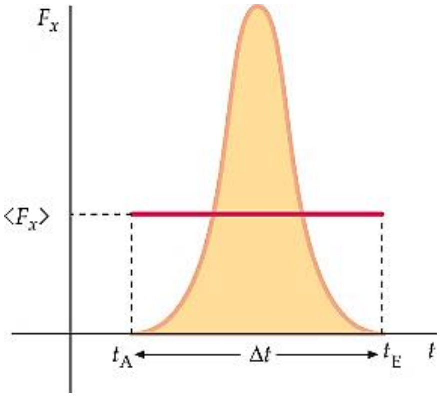


Abb. 3-1: Kraftstoss[2]

$$\Delta p = \int_{t_A}^{t_E} F(t)dt$$

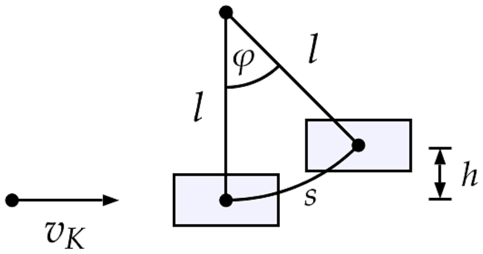


Abb. 3-2: Ballistisches Pendel[3]

Das 1742 von Benjamin Robins (1707–1751) erfundene ballistische Pendel wird benutzt, um Geschossgeschwindigkeiten zu messen. Dazu wird das Projektil auf einen massiven Körper aus Holz gelenkt. Es handelt sich um einen unelastischen Stoss, bei dem die Geschossenergie vollständig auf den Pendelkörper übertragen wird. Der Auslenkwinkel (φ) ist ein Maß für die Projektilgeschwindigkeit.

$$v = \left(\frac{M}{m} + 1\right) \cdot \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi}$$

M Pendelmasse, m Geschossmasse
l Pendellänge
g Erdbeschleunigung

3.1.2 Bewegungsgleichung

Die Newtonsche Bewegungsgleichung $\mathrm{F} = \mathrm{ma}$ folgt aus der Ableitung des Impulses $\mathrm{p} = \mathrm{mv}$ nach der Zeit.

$$F = (mv)' = \dot{p} = \frac{dp}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Wir rechnen nachfolgend nicht mit Differentialen, sondern mit Differenzen, weil die behandelten Grössen zeitlich konstant oder gleichmässig verlaufen.

a) Ein Fahrzeug mit einer Masse von 1'200 kg besitzt einen Impuls von $2 \cdot 10^4$ Newtonsekunden ($1\ \mathrm{Ns} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$). Wie gross ist die Geschwindigkeit?

---

[2] Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik (Springer Spektrum)

[3] Bildquelle: http://www.semibyte.de/wp/

Aus $\mathrm{p} = \mathrm{mv}$ folgt:

$$v = \frac{p}{m} = \frac{20'000\ Ns}{1'200\ kg} = \frac{20'000\ kg \cdot m \cdot s^{-1}}{1'200\ kg} = \frac{20'000\ m \cdot s^{-1}}{1'200} = 16\frac{2}{3}\ m/s$$

b) Die verfügbare Bremskraft beträgt 3'500 N. Wie lange dauert es, bis das Fahrzeug zum Stillstand gelangt?

Um die Geschwindigkeit des Fahrzeuges auf Null zu reduzieren, muss der Impuls aus dem Subsystem "Auto" verschwinden.

Aus $\Delta\mathrm{p} = \mathrm{F} \cdot \Delta\mathrm{t}$ folgt:

$$t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{20'000\ Ns}{3'500N} = 5{,}7\ s$$

c) Die bei der Bremsung auftretende (negative) Beschleunigung beträgt:

$$a = -\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_A - v_E}{\Delta t} = \frac{16\frac{2}{3} m \cdot s^{-1} - 0\ m \cdot s^{-1}}{5{,}7\ s} = 2{,}9\ ms^{-2}$$

Die Fahrzeuginsassen sind für kurze Zeit einer Beschleunigung von ≈ 3g – also der dreifachen Erdbeschleunigung – ausgesetzt.

3.2 Federpendel

Die Formel für die Rückstellkraft einer Schraubenfeder lautet: $F = -kx$ (k ist die Federkonstante in N/m). Diese Gleichung ist auch als *Hooke'sches Gesetz* bekannt.

Wird die Feder entspannt, folgt sie der Gleichung: $m\ddot{x} = -\ kx$ [Gl. 3-1]

Obige Differentialgleichung zweiter Ordnung ist als "Schwingungsgleichung" bekannt. Auf der linken Seite kommt die zweifache Ableitung des Ortes nach der Zeit, also eine Beschleunigung, vor, währenddem die Masse (m) eine Konstante ist.

Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung sind in Physik und Technik häufig anzutreffen. Interessant wäre nun, auch die Lösung für diese Dgl. zu erfahren – also wie gross $\mathrm{x(t)}$ ist. Eigentlich benötigen wir dafür die Kenntnisse des im Teil 3 (Differentialgleichungen) zu behandelnden Stoffes. Glücklicherweise lassen sich Lösungen gewöhnlicher Dgln. gelegentlich durch Intuition finden. Wir fragen uns also: Welche Funktion führt bei zweifacher Ableitung zu einem Term mit negativem Vorzeichen (gemeint ist $-\mathrm{kx}$)?

Wir erinnern uns an die Differentiation trigonometrischer Funktion aus Tabelle 1:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin(x) & f'(x) = \cos(x) \\ f(x) = \cos(x) & f'(x) = -\sin(x) \end{array} \quad \rightarrow \quad \sin''(x) = -\sin(x)$$

Die erste Ableitung des $\sin(\mathrm{x})$ ergibt den $\cos(\mathrm{x})$; die Ableitung des $\cos(\mathrm{x})$ ergibt $-\sin(\mathrm{x})$. Also ergibt die zweifache Ableitung von $\sin(\mathrm{x})$ den Term $-\sin(\mathrm{x})$. Die gesuchte Funktion könnte somit eine Sinusfunktion sein!

Diesem Einfall folgend schreiben wir probeweise:

$x(t) = a\sin(\omega t)$ a und ω sind Konstanten (für Amplitude und Frequenz); ωt ist der Phasenwinkel eines periodischen Vorganges.

Angewandt auf die Dgl. $m\ddot{x} = -\,kx$ bekommen wir:

$m \cdot a\sin''(\omega t) = -k \cdot a\sin(\omega t)$ $\omega_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$

ω wird als Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz [s^{-1}] bezeichnet; als ω_0 bezeichnet man die *Eigenkreisfrequenz* des schwingenden Systems.

Weil ω für eine Frequenz reserviert ist, ergibt eine negative Lösung aus physikalischer Sicht keinen Sinn (wir verwenden also nur die positive Lösung).

$x(t) = a\sin(\omega_0 t)$ erfüllt [Gl. 3-1]. Unsere zunächst durch eine Annahme gewonnene Lösung erweist sich somit als richtig!

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \underbrace{\boldsymbol{a}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\varphi})}_{\mathrm{A}}\sin(\omega t) + \underbrace{\boldsymbol{a}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\varphi})}_{\mathrm{B}}\cos(\omega t)$$

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \rightarrow x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

φ_0 ist der sog. Nullphasenwinkel, welcher das Vor- oder Nacheilen einer sinusförmigen Schwingung in Bezug auf den Nullpunkt x(t) = 0 beschreibt.

Durch Einführung der Eigenkreisfrequenz ω_0 können wir die Differentialgleichung für das ungedämpfte Federpendel umschreiben.

$m\ddot{x} = -\,kx$; $\ddot{x} = -\,\omega_0^2 \cdot x$

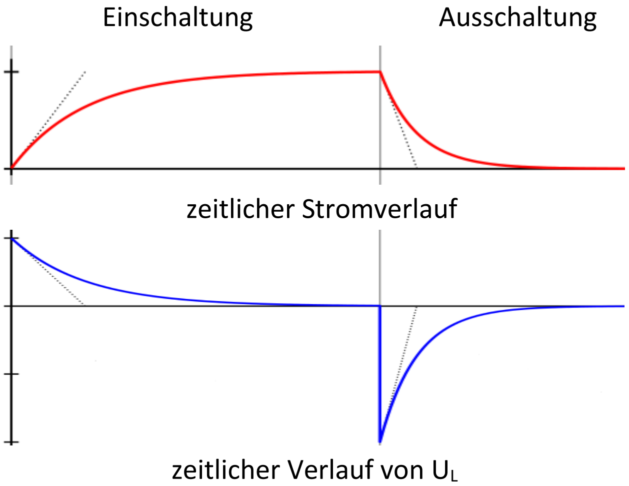
Anm.: Die Lösung der Differentialgleichung für das ungedämpfte Federpendel beschreibt eine harmonische Schwingung, also eine Schwingung mit einem sinusförmigen Verlauf. Bei Fehlen einer Reibungskraft oder Abwesenheit einer zusätzlichen Antriebskraft schwingt das Federpendel mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 bzw. der Eigenfrequenz $f_0 = \omega_0/2\pi$. Im Unterschied zu Wellen, die sich über ein Raumgebiet ausbreiten, sind Schwingungen an einen bestimmten Ort gebunden. Eine schwingende Gitarrensaite bspw. ist fest zwischen Wirbel und Steg eingespannt und schwingt in Bezug auf das benutzte Instrument stets am selben Ort. Die von der schwingenden Saite erzeugten Klänge breiten sich dagegen als Wellen im Raum aus.

Viele Systeme sind in der Lage, durch Schwingungen unterschiedlicher Frequenz, Amplitude und Phase angeregt zu werden. Es kommt zu einer "Überlagerung" (Superposition) der unterschiedlichen Schwingungen. Die Klangfarbe eines Musikinstruments bspw. ergibt sich aus der Anzahl der beteiligten Oberschwingungen oder Harmonischen (Ergebnis ist eine enharmonische Schwingung). In umgekehrtem Sinne lässt sich eine beliebige Schwingung in eine endliche Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegen. Zur Erinnerung an Jean Baptist Joseph Fourier (1768-1830), der sich in seiner "Theorie der Wärme"[4] mit den Summen trigonometrischer Polynome befasste, wird diese Zerlegung als *Fourieranalyse* bezeichnet.

[4] Théorie analytique de la chaleur (1882).

3.3 Selbstinduktion

Im Unterschied zu einem ohmschen Widerstand zeigt eine Spule (Induktivität) ein abweichendes zeitliches Verhalten beim Ein- und Ausschalten. Beim Einschalten steigt der Strom nur langsam an, beim Ausschalten fliesst er noch eine Weile. Dieses Phänomen folgt aus der Selbstinduktion (U_{ind}), die sich gemäss der Lenzschen Regel ihrer Ursache (= Stromänderung) widersetzt..



$$U_{ind} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

L ist die Selbstinduktion in Henri [1 H = 1 Vs/A]

Für eine eisenlose Spule gilt:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 \cdot A}{l}$$

A wirksamer Spulenquerschnitt, l Spulenlänge, N Windungszahl

μ_0 ist die magnetische Feldkonstante[5]

Abb. 3-3: Auswirkungen der Selbstinduktion bei einer Spule im Gleichstromkreis

Wie aber gelangt man zur Formel für die Selbstinduktion?

Für den magnetischen Fluss gilt:

$$\Phi = \int B \cdot dA = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l} \cdot A$$

ϕ magnetischer Fluss in Vs
B Flussdichte in $Vs \cdot m^{-2}$

Durch Ersetzen von Φ durch B · A erhalten wir:

$$U_{ind} = -N \frac{d}{dt} \cdot \left(\mu_0 \frac{N \cdot I}{l} \cdot A \right)$$

Umformen der Terme ergibt die Formel für die Selbstinduktionsspannung.

$$U_{ind} = -\mu_0 \frac{N^2 \cdot A}{l} \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \dot{I}$$

Der Ausdruck $\mu_0 \frac{N^2 \cdot A}{l}$ ist mathematisch gesehen eine Konstante und wird als *Induktivität* (L) bezeichnet; Konstanten bleiben beim Differenzieren erhalten.

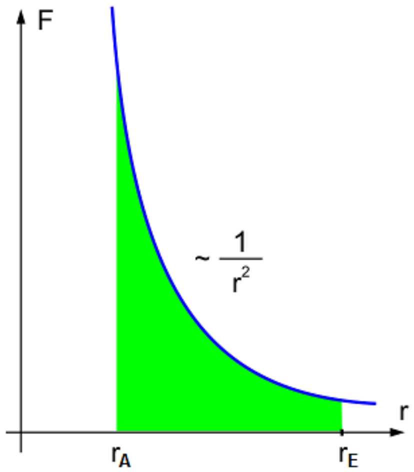
Zu beachten ist, dass die obige Herleitung nur für ein Solenoid (eine eisenlose lange Spule mit vielen Windungen) gilt. Zur Berechnung kurzer Spulen mit hoher Kernpermeabilität und grosser Flussdichte wird meist ein numerisches Lösungsverfahren verwendet.

[5] $\mu_0 = 1{,}256\ldots \cdot 10^{-6}$ N/A^2 [mit den Einheiten Newton (N) und Ampere (A)]; im SI-System gilt: $\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot c = 1$.

3.4 Verschiebung eines Massenpunktes im Schwerefeld

3.4.1 Gravitationsgesetz

Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$ kommt sowohl beim Gravitationsgesetz als auch beim Coulombschen Gesetz der Elektrostatik vor. Das Gravitationsgesetz ist formal mit dem Coulombschen Gesetz identisch. Im Unterschied zur Gravitation kommen dort aber Ladungen vor, die sich anziehen oder abstossen. Die mathematische Gesetzmässigkeit der zugrundeliegenden Kräfte ist aber dieselbe.



Das von Isaac Newton (1642-1726) während der "Pestjahre" aufgefundene Gravitationsgesetz lautet:

$$f(x) = \frac{1}{r^2} \quad \rightarrow \quad F = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2}$$

M ist die Zentralmasse (Sonne), m die Masse eines Trabanten (Erde, Mond); r ist der Abstand zwischen beiden Massen (von Schwerpunkt zu Schwerpunkt) und γ ist die Gravitationskonstante (gelegentlich auch mit G bezeichnet).[6]

Abb. 3-4: Gesetz des reziproken Abstandsquadrates

Unsere Aufgabe sei nun, die Arbeit W zu berechnen, um einen Körper mit der Masse m, der sich im Einflussbereich der felderzeugenden Masse M befindet, entgegen der Anziehungskraft F entlang eines bestimmten Weges dr zu bewegen.

$$dW = Fdr = \gamma \frac{Mm}{r^2} dr$$

Soll der Körper (m) aus dem Abstand r_A in den Abstand r_E gebracht werden, so erhalten wir die dafür erforderliche Arbeit durch Integration.

$$W = \int_{r_A}^{r_E} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \int_{r_A}^{r_E} \frac{dr}{r^2} = \gamma Mm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_E} \right)$$

Von besonderem Interesse ist, wenn der Körper (m) gänzlich aus dem Schwerefeld von M entfernt werden soll ($r_E = \infty$).

Die Berechnung führt zu einem uneigentlichen Integral.

$$W = \int_{r_A}^{\infty} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \int_{r_A}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \gamma \frac{Mm}{r_A}$$

3.4.2 Fluchtgeschwindigkeit

Um einen Körper (m) "unendlich" weit von der Erdoberfläche zu entfernen, muss ihm die Energie $W = \gamma \frac{Mm}{R}$ zugeführt werden (R = Erdradius).

[6] In SI-Einheiten beträgt $\gamma = 6{,}673\ldots \cdot 10^{11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^2$

Wird die benötigte Energie dem Flugkörper während des Aufstiegs im Schwerefeld der Erde als "kinetische Energie" zugeführt, gilt:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma\frac{Mm}{R}$$

Damit erhalten wir die als "Fluchtgeschwindigkeit" erforderliche Geschwindigkeit, um die Erde definitiv zu verlassen.

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 11{,}2\ \frac{km}{s}$$

Erstaunlicherweise hängt die Fluchtgeschwindigkeit nicht von der Masse des aufsteigenden Körpers ab, sondern nur von Masse (M) und Radius (R) der Erde.

Auf dem Mond beträgt die Fluchtgeschwindigkeit (auch als zweite astronautische Geschwindigkeit bezeichnet) 2,38 km/s und auf dem Mars 5,01 km/s.

Anm.: Konstantin Ziolkowski (1857-1935) – Mathematiklehrer und Begründer der russischen Kosmonautik veröffentlichte 1903 die von ihm gefundene Raketengrundgleichung.

$$v(m) = v_g \cdot ln\frac{m_0}{m}$$

Bei senkrechtem aufstieg einer Rakete verringert sich die theoretisch erzielbare Geschwindigkeit um die Fallgeschwindigkeit (gt). Zusätzlich wird die Rakete durch den Luftwiderstand gebremst.

Das Grundprinzip des Raketenantriebs besteht darin, eine begrenzte Menge an Treibstoff mit einer bestimmten Austrittsgeschwindigkeit auszustoßen und gemäß dem 3. Newtonschen Gesetz (Actio = Reactio) den Impuls und damit die Geschwindigkeit der Rakete mit ihrer Nutzlast in die entgegengesetzte Richtung zu erhöhen. Für eine einstufige Rakete mit Anfangsmasse m_0 und Anfangsgeschwindigkeit Null, deren Triebwerk die Stützmasse kontinuierlich und mit der konstanten Geschwindigkeit v_g ausstößt, gilt die Raketengrundgleichung mit der Geschwindigkeit v der Rakete in Abhängigkeit von der Restmasse m (also der um den verbrauchten Treibstoff verkleinerten Anfangsmasse).[7]

Ferner dachte Ziolkowski darüber nach, ob eine Rakete überhaupt die benötigte Fluchtgeschwindigkeit erreichen könne und kam zum Schluss, dass anstelle der damals bekannten Feststoffraketen nur Flüssigkeitsraketen dazu in der Lage sein würden. Darüber hinaus stellte er auch das Prinzip der Mehrstufenrakete auf eine wissenschaftliche Grundlage. Zusammen mit Hermann Oberth und Robert Goddard gilt Ziolkowski deshalb als Pionier der Raumfahrt.

3.5 Zerfallsgesetz

Der Experimentalphysiker Ernst Rutherford (1871-1937) beobachtete um 1900, dass die Aktivität eines Radionuklids in gleichen Zeiträumen stets um denselben Faktor abbnimmt.

Bei exponentieller Abnahme einer Größe N(t) hängt die Halbwertszeit weder von der Wahl des Anfangszeitpunkts noch von dem Startwert ab. Als Halbwertszeit bezeichnet man die Zeitspanne, nach der eine Grösse die Hälfte ihres anfänglichen Wertes erreicht.

$$\Delta N(t) = -\lambda \cdot N(t) \cdot \Delta t$$

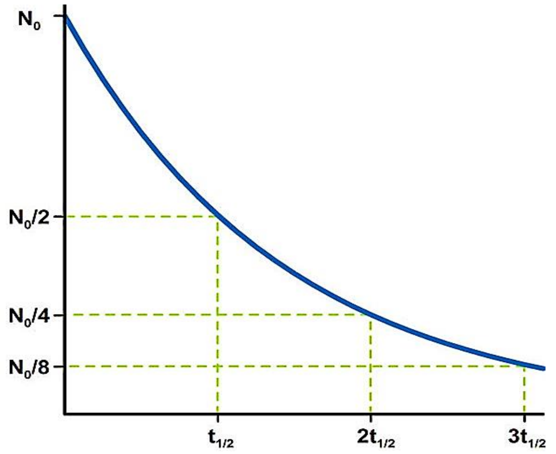
[7] Zitatquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Raketengrundgleichung

Daraus folgt für den exponentiellen Zerfall:

$N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$

N(t) Stoffmenge
λ Zerfallskonstante (Kehrwert der mittleren Existenzdauer)

Auch diese einfache Differentialgleichung können wir im Rahmen dieser Arbeit nicht lösen. Es soll hier lediglich gezeigt werden, dass die Ableitung einer Funktion $f'(t)$ bzw. $f''(t)$ in Physik und Technik eine unverzichtbare Rolle spielt.



$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Folgt die Abnahme einem Exponentialgesetz, dann ist die Halbwertszeit bei gegebener Zerfallsrate immer dieselbe, auch wenn die Restmenge, die nach einer beliebigen Zeit übrig geblieben ist, als "neue" Ausgangsmenge eingesetzt wird.

Abb. 3-5: Exponentielle Abnahme einer Grösse

Die Umkehrung des exponentiellen Zerfalls wird als exponentielles Wachstum bezeichnet. Die dafür benötigte Differentialgleichung stimmt mit Ausnahme des Vorzeichens für λ mit derjenigen für den exponentiellen Zerfall überein.

$B'(t) = \lambda \cdot B(t)$

Wirklich interessant wird es daher erst, wenn wir auch in der Lage sind, gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen!

3.6 Effektivwert bei sinusförmigen Spannungen und Strömen

Ein sinusförmiger Wechselstrom setzt in einem Wirkwiderstand (R) während einer definierten Zeitspanne t dieselbe elektrische Energie (W) in Wärme um, wie ein Gleichstrom (I) von derselben Grösse wie der *Effektivwert* (I_{eff}) des Wechselstromes.

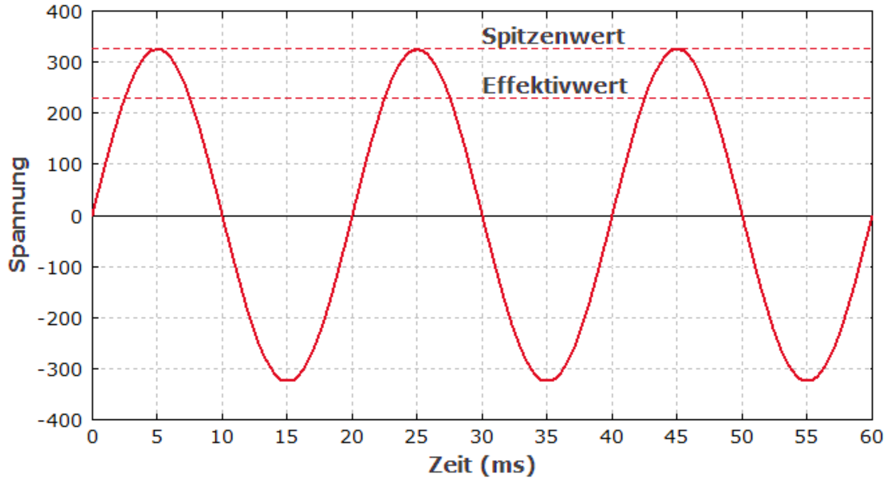


Abb. 3-6: Sinusförmiger Verlauf der unverzerrten Netzwechselspannung von 230 V (50 Hz).

Während bei einem reinen Gleichstrom Stromstärke und Spannung während einer bestimmten Zeitdauer Δt als konstant angesehen werden, haben Stromstärke und Spannung einer harmonischen Schwingung einen sinusförmigen Verlauf. Die Messgrössen variieren bei jeder Halbwelle zwischen Null und einem positiven oder negativen Spitzenwert.

Wirkenergie und Wirkleistung bei Gleich- und Wechstrom:

Gleichstrom (DC)	**Wechselstrom (AC)**	
$U, I = const.$	$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t)$	$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$
Elektrische Arbeit (Energie)	**Elektrische Leistung**	
$W = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t$	$P = U_{eff} \cdot I_{eff} = I^2 \cdot R$	
Oft wird für den Effektivwert nur ‹U› bzw. ‹I› geschrieben.		

Die mathematische Herleitung des Effektivwertes erfolgt über die (Wirk)-Leistung ($P = I^2R$). Weil bei einem Wirkwiderstand (R) die angelegte Spannung und der durchfliessende Strom in Phase zueinander sind, ist ihr Produkt (= Wirkleistung) immer positiv. Physikalisch bedeutet dies, dass die elektrische Leistung im Verbraucher in thermische Leistung umgewandelt wird.

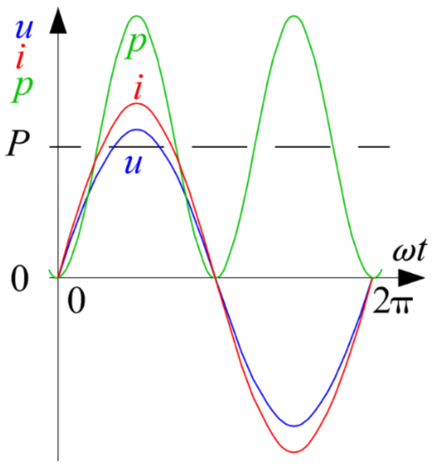


Abb. 3-7: Leistungsverlauf in einem ohmschen Verbraucher[8]

Momentanleistung:

$$dp = du \cdot di$$

Dauerleistung:

$$P = U \cdot I$$

Periode [rad]:

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \quad ; \quad 2\pi \equiv \angle 360°$$

Der Effektivwert einer sinusförmigen Wechselstromgrösse beträgt:

Elektrische Spannung	**Elektrische Stromstärke**	Als $\hat{u}$ (gelesen "u Dach") bezeichnet man den Scheitelwert (Spitzenwert) der Spannung. Alternative Bezeichnungen sind u_{max}, u_s (s von Spitze) oder u_p (p von peak); adäquates gilt für die Stromstärke. Bei kleinem ‹u› bzw. ‹i› handelt es sich um den Augenblickswert einer zeitlich veränderlichen Spannung u(t) oder eines zeitlich veränderlichen Stromes i(t).
$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$I = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$	

Anm.: Wird bspw. die Spannung mit einem Drehspulinstrument gemessen, so zeigt dieses den Effektivwert (auch quadratischer Mittelwert genannt) an. Bei einem nichtsinusförmigen Verlauf zeigt das Drehspulinstrument aufgrund der dann vorkommenden Harmonischen eine zu geringe Spannung an. Abhilfe schafft ein True-RMS-Digitalmultimeter[9], welches den wahren Wert (Effektiv-

[8] Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Wechselstrom

[9] RMS = Root mean square, also Quadratwurzel; True-RMS (TRMS) ist folglich der wahre quadratische Mittelwert.

wert) bis zu einem definierten *Crestfaktor*[10] auch bei verzerrter Kurvenform anzeigt. Solche Messgeräte können auch den Spitzenwert anzeigen. Ansonsten müsste man sich eines Oszilloskops bedienen, um so den Spitze-Spitze-Wert (u_{ss} bzw. u_{pp}) – neu als "Spitze-Tal-Wert" bezeichnet – zu bestimmen und daraus den Spitzenwert $u_s = u_{ss}/2$ zu erhalten.

Wie nun gelangt man zur √2 in den obigen Formeln?

Die im Verbraucher freigesetzte Leistung (P) wird durch das Integral der Wärmeleistung (I^2R) während einer Periode bestimmt.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\, dt \;\; \rightarrow \;\; I^2 R = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\, dt$$

Nach ‹I› aufgelöst ergibt sich:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\, dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i^2\, dt} \qquad \text{[Gl. 3-1]}$$

Der Momentanwert eines sinusförmigen Stromes wird berechnet mit der Formel:

$$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t)$$

Eingesetzt in Gleichung [3-1b]:

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{\imath}^2 \cdot sin^2(\omega t)\, d(\omega t)}$$

Die Berechnung des folgenden Integrals ergibt:

$$\int_0^{2\pi} sin^2(\omega t)\, d(\omega t) = \left[\frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{4}\sin(2\omega t)\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Mittels diesem Kunstgriff und aufgelöst nach ‹I› erhalten wir abschliessend:

$$I = \hat{\imath} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \pi} \;\rightarrow\; I = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$$ (der Scheitelfaktor √2 beträgt ≈ 1,41)

Damit ist unsere Aufgabe gelöst!

Verweise:

https://www.elektrotechnik-fachwissen.de/wechselstrom/

[10] Der Crest-Faktor (oder Scheitelfaktor) beschreibt das Verhältnis von Scheitelwert (oder Spitzenwert) zu Effektivwert einer Wechselgröße. Eine sinusförmige Wechselspannung mit einem Effektivwert von 230 V hat einen Spitzenwert von 325 V, der Crest-Faktor beträgt somit 1,41. Hochwertige DMM zeigen den Effektivwert einer Wechselgrösse bis zu einem Crestfaktor von 2,5 und darüber mit einer Genauigkeit von ± 4 % an.

4 Lernquellen

4.1 Fachliteratur

Uwe Post: Fit fürs Studium Mathematik (Rheinwerk)

Heinz Rapp: Mathematik für die Fachschule Technik (Vieweg + Teubner)

Silvanus P. Thompson: Analysis leicht gemacht (Verlag Harri Deutsch)

Lothar Kusch (Hrsg. Heinz Ziburske): Differentialrechnung, Mathematik Bd. 3 (Cornelsen)

Lothar Kusch (Hrsg. Heinz Ziburske): Integralrechnung, Mathematik Bd. 4 (Cornelsen)

Hans-Jochen Bartsch: Taschenbuch mathematischer Formeln (Fachbuchverlag Leipzig)

Ilja N. Bronstein et al.: Taschenbuch der Mathematik (Europa Lehrmittel)

4.2 Weblinks

http://www.mathematik.net/

https://www.mathe-online.at/

https://mathepedia.de/Mathematik.html

https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/

4.3 Tools

https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/

http://maxima.sourceforge.net/de/

https://www.symbolab.com/