

1 Einführung Differentialgleichungen

Differentialgleichungen (Dgln.) spielen in nahezu jeder Wissenschaft – insbesondere aber in Physik und Ingenieurwissenschaften – eine unverzichtbare Rolle. Wir unterscheiden gewöhnliche Differentialgleichungen von partiellen Differentialgleichungen.

1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die gesuchte Funktion hängt lediglich von einer Variablen (x) ab bzw. es kommen nur Ableitungen nach einer Variablen vor.

$$y(x) + 2y'(x) = \sin(x)$$

Die einzige Funktion, die gleich ihrer Ableitung ist, wird *Exponentialfunktion* genannt.

$$y' = y \rightarrow y = e^x$$

1.2 Partielle Differentialgleichungen

Die gesuchte Funktion hängt von mehreren Variablen (x, t) ab, so dass partielle Ableitungen der Funktion vorkommen. Unter einer partiellen Ableitung versteht man die Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten $f(x, t)$ nach einem dieser Argumente (bzw. in Richtung dieser Koordinatenachse).

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{partielle Ableitung von } f \text{ nach der } i\text{-ten Variablen } x_i \text{ im Punkt } a$$

∂ (auch "Jacobidelta" genannt) wird als "partiell d" oder "del" gesprochen¹

Die Wellengleichung (d'Alembert-Gleichung) – um ein häufig vorkommendes Beispiel zu zeigen – ist eine lineare partielle Differentialgleichung von zweiter Ordnung und beschreibt die zeitliche und örtliche Entwicklung von Wellen im ladungsfreien Raum. Weil die Gleichung linear ist, überlagern sich Wellen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

Homogene Wellengleichung in einer Dimension:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \Delta u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, t)$$

u Auslenkung der Welle; c Phasengeschwindigkeit der Welle

$$\Delta \text{ Laplace-Operator} \quad := \quad \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla \text{ Nabla-Operator} \quad := \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

Die Lösungen der Wellengleichung heißen – omen est nomen – einfach Wellen.

¹ <https://de.wiktionary.org/wiki/del>

2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Mit der vorliegenden Arbeit soll insbesondere beim praxisorientierten Techniker das Interesse am weiten Gebiet der Differentialgleichungen entfacht werden. Auf mathematische Strenge wird aufgrund des vorliegenden Zwecks kein Wert gelegt. Vielmehr soll mittels einfacher Beispiele ein Anreiz geschaffen werden, damit sich auch der Praktiker zum Eintritt in die "heiligen Hallen" der Höheren Mathematik entschliesst.

2.1 Klassifizierung gewöhnlicher Differentialgleichungen

Im Rahmen dieser Arbeit befassen wir uns nur mit gewöhnlichen Differentialgleichungen von höchstens der zweiten Ordnung.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung enthält eine oder mehrere Ableitungen $f^{(n)}(x)$ einer Funktion und manchmal auch die Funktion selbst. Als Lösung der Differentialgleichung suchen wir die Ausgangsfunktion $f(x)$.

► Die höchste in einer Differentialgleichung vorkommende Ableitung $y^{(n)}$ bestimmt die Ordnung der Differentialgleichung.

Besitzt die Differentialgleichung nur eine Ableitung, so spricht man von einer Differentialgleichung erster Ordnung.

$$2y' + yx = 0$$

Besitzt die Differentialgleichung zwei Ableitungen, so handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung usw.

$$y'' + y = 2 \sin(x)$$

► Lässt sich eine Differentialgleichung nach der höchsten vorkommenden Ableitung auflösen, heisst sie *explizit*; andernfalls heisst sie *implizit*.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

explizite Form der Dgl.

implizite Form der Dgl.

► Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist linear, wenn sie linear in der Funktion und in ihren Ableitungen ist.

$$y' = 2xy$$

Kommen Funktion und Ableitungen in höherer Potenz vor, handelt es sich um eine nicht-lineare Differentialgleichung.

$$(y'y)^2 + y^2 = 0$$

► Die rechte Seite einer Differentialgleichung ist die Inhomogenität; ein dort befindlicher Term wird auch *Störfunktion* genannt.

Eine Differentialgleichung ist *homogen*, wenn auf der rechten Seite eine Null steht.

$$y'' + ay = 0$$

Existiert dagegen ein Störglied, so handelt es sich um eine *inhomogene* Differentialgleichung.

$$y'' + ay = f(x)$$

2.2 Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen

2.2.1 Allgemeine Lösung einer Dgl.

Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n unabhängige, freie Integrationskonstanten als Parameter.

a) Dgl. 1. Ordnung b) allgemeine Lösung der Dgl.

$$y' = 2x \qquad y = \int 2x \, dx = x^2 + C$$

Der Parameter C bestimmt im Beispiel den Abszissenabschnitt (Lage des Scheitelpunktes) der Schar von Normalparabeln.

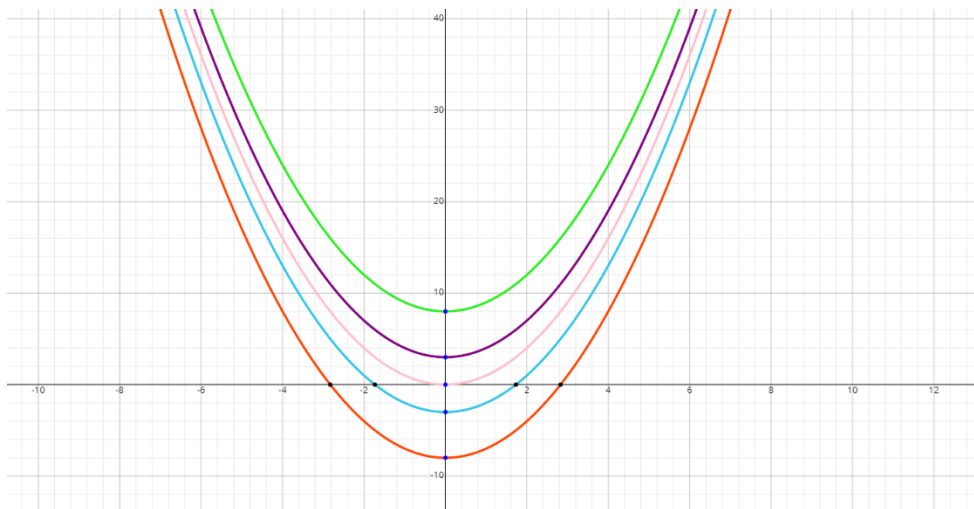


Abb. 1: Lösungskurven für $f(x) = x^2 + C$

2.2.2 Spezielle Lösung einer Dgl.

Eine spezielle oder *partikuläre* Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung erhält man aus der allgemeinen Lösung, indem durch n Zusatzbedingungen den Integrationskonstanten feste Werte zugeordnet werden.

a) allgemeine Lösung einer Dgl. b) spezielle (partikuläre) Lösung der Dgl.

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 + C_2 \qquad s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

2.2.3 Singuläre Lösung einer Dgl.

Die Funktion $y = y(x)$ ist eine *singuläre* Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt, aber nicht aus der allgemeinen Lösung durch spezielle Parameterwahl gewonnen werden kann.

2.2.4 Triviale Lösung einer Dgl.

Die Lösung der Dgl. $y' = y \cdot p$ lautet: $y = c_1 \cdot e^x$

Ist $c_1 = 0$ erhalten wir die *triviale* Lösung $y = 0$ der Dgl.

2.3 Anfangsbedingungen und Randwerte

Bei physikalischen Problemstellungen ist desöfteren zu unterscheiden zwischen einem *Anfangswertproblem* und einem *Randwertproblem*.

a) Bei einem Anfangswertproblem (AWP) ist die Lösung einer Differentialgleichung gesucht, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ bestimmte Anfangsbedingungen erfüllt.

b) In der Praxis hat man es oft mit Randwertproblemen (RWP) zu tun. Hierbei wird eine Lösung einer Differentialgleichung gesucht, die vorgegebene Werte am Rande eines Definitionsbereichs annimmt.

Ein paar typische Beispiele für RWP sind:

- schwingende Saite, die an ihren beiden Enden (= Rand) fest eingespannt ist
- schwingende Membran (der Rand ist hier ein Kreisring)
- die Kettenlinie einer zwischen zwei Punkten durchhängenden Kette

Bei partiellen Differentialgleichungen, wenn also die gesuchte Funktion nicht nur von einer, sondern von mehreren Variablen abhängt, werden oftmals Randbedingungen an Stelle von Anfangsbedingungen verwendet. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir lediglich ein paar wenige beispielhafte Problemstellungen mit gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, die dem Techniker irgendwann begegnen könnten.

2.4 Lösungswege für gewöhnliche Differentialgleichungen

2.4.1 Drei bewährte Lösungsstrategien

Für gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kennt der versierte Anwender drei Lösungsstrategien:

1) Bei homogenen Dgln. erster Ordnung kann die Trennung bzw. *Separation der Variablen* verwendet werden. Ergebnis ist eine e-Funktion.

2) Kommt zu einer homogenen Dgl. $f'(x)$ noch eine weitere Funktion $s(x)$ hinzu, die weder mit y' noch mit y durch Multiplikation oder Division verbunden ist, so sprechen wir von einer *inhomogenen* Differentialgleichung. Solche Dgln. sind deutlich schwieriger zu lösen, als homogene. Durch *Variation der Konstanten* (Lösungsansatz von Lagrange) kann in den meisten Fällen eine Lösung erzielt werden.

3) Bei Dgln. zweiter Ordnung kann in den allermeisten Fällen eine Lösung mit dem *Exponentialansatz* ($e^{\lambda t}$) gefunden werden.

2.4.2 Umkehrung der Differentiation

Gelegentlich ist bei einer Differentialgleichung die Anwendung einer Ableitungsregel erkennbar, so dass wir durch *Umkehrung der Differentiation* die Ausgangsfunktion erhalten.

Beispiel 1:

$$y'(x) \cdot x^2 + y(x) \cdot 2x = 1 \quad [\text{Gl. 1}]$$

Wenn wir uns an die im Teil 2 vorgestellte *Produktregel* erinnern, stellen wir fest, dass auf der linken Seite der Dgl. die Ableitung eines Produktes steht.

$$(uv)' = u'v + uv' \rightarrow \{y(x) \cdot x^2\}' = y'(x) \cdot x^2 + y(x) \cdot 2x$$

Daher können wir [Gl. 1] auf beiden Seiten integrieren und erhalten:

$$y(x) \cdot x^2 = x + C \rightarrow y(x) = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$$

Beispiel 2:

$$y'(x) \cdot y(x)^2 = \cos(x)$$

Hier kam offensichtlich die Kettenregel zur Anwendung, denn auf der linken Seite der Dgl. steht nichts anderes als $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} y(x)^3 \right)$.

Somit gilt:

$$\left(\frac{1}{3} y(x)^3 \right)' = \cos(x)$$

Durch Integration auf beiden Seiten erhalten wir:

$$\frac{1}{3} y(x)^3 = \sin(x) + C_1 \rightarrow y(x)^3 = 3 \cdot \sin(x) + 3C_1$$

Die allgemeine Lösung der Dgl. lautet somit:

$$y(x) = \sqrt[3]{3 \cdot \sin(x) + C} \quad \text{wobei} \quad C = 3C_1$$

3 Lösungsbeispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen

Das eigenständige Lösen von Differentialgleichungen – selbst gewöhnlicher – kann mitunter schwierig sein und erfordert eine gewisse Erfahrung auf diesem Gebiet.

Abhilfe bei Schwierigkeiten schafft nur fleissiges Üben anhand geeigneter Beispiele (z.B. Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Anwendungsbeispiele).

Noch schwieriger gestaltet sich das Lösen partieller Differentialgleichungen, worauf hier aber nicht eingegangen werden kann. Wer sich tiefer in diese anspruchsvolle Materie einarbeiten möchte, sei auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen.²

3.1 Trennung der Variablen

Gegeben sei die explizite Differentialgleichung:

$$y' = y \cdot n \rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot n ; \text{ mit } n = \text{const.}$$

Nun trennen wir die Variablen und formen die Dgl. um:

² Vladimir Arnold: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen (Springer).

$$\frac{dy}{y} = n \cdot dx$$

Wir integrieren auf beiden Seiten:

$$\int \frac{dy}{y} = \int n \cdot dx \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int n \cdot dx \quad \begin{array}{l} \text{Das Stammintegral} \\ \text{ist bekannt:} \end{array} \quad \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

Als Integrationslösung erhalten wir somit:

$$\ln |y| = nx + C$$

Die Integrationskonstante ist unbekannt, so dass wir auch schreiben können:

$$\ln |y| = nx + \ln |C|$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$\ln |y| - \ln |C| = nx$$

Auf Grund der Rechenregel $\ln |a| - \ln |b| = \ln \frac{|a|}{|b|}$ folgt: $\ln \frac{|y|}{|C|} = nx$

Nun erheben wir beide Seiten zu Potenzen von e und erhalten: $e^{\ln \frac{|y|}{|C|}} = e^{nx}$

Anwendung der Regel $e^{\ln |a|} = a$ ergibt: $\frac{y}{C} = e^{nx} \rightarrow y = C \cdot e^{nx}$

Damit ist die Dgl. gelöst!

3.2 Variation der Konstanten

Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung:

$$y' = y \cdot u(x) + s(x) \quad s(x) \text{ wird als Störglied bezeichnet}$$

Per definitionem gilt:

Die prinzipielle Lösbarkeit einer linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich in Form einer allgemeinen Lösung der homogenen Dgl. (mit $s(x) = 0$) und einer partikulären Lösung der inhomogenen Dgl. angeben.

Gelöst werden soll die folgende Dgl.:

$$y' = y \cdot n + s \quad \text{mit } u(x) = n \text{ und } s(x) = s$$

der homogene Teil der Dgl. lautet: $y'_{\text{homogen}} = y \cdot n$

der partikuläre Teil der Dgl. lautet: $y'_{\text{partikulär}} = s$

die allg. Lösung des homogenen Teils lautet: $y_{\text{homogen}} = c_1 \cdot e^{nx}$

Die Konstante c_1 sei eine Funktion von x ; eine Umbenennung in $c_2(x)$ führt zu:

$$y = c_1 \cdot e^{nx} \rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{nx}$$

Wir bilden nun die Ableitung der Funktion und wenden dazu die *Produktregel* (Analysis für Techniker, Teil 1) an: $(uv)' = u'v + uv'$

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{nx} + c_2(x) \cdot e^{nx} \cdot a$$

Der Term a folgt aus der Kettenregel, die zur Ableitung von e^{nx} anzuwenden ist.

Rekapitulation der Kettenregel bei e-Funktionen:

$$f(x) = e^{2x}$$

a) für die "äussere Funktion" gilt: $g(x) = e^x \rightarrow g'(x) = e^x$

b) für die "innere Funktion" gilt: $h(x) = 2x \rightarrow h'(x) = 2$

Eingesetzt in die Ausgangsgleichung ergibt sich:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Als Ergebnis der Differentiation erhalten wir:

$$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$$

3.3 Exponentialansatz

Dieses mit dem *Exponentialansatz* durchgeführte Verfahren kann bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten angewendet werden.³

$$\ddot{u}(t) - 4u(t) = 0 \quad \text{[Gl. 2]}$$

Zur Bestimmung einer eindeutigen Lösungen benötigen wir zwei Anfangsbedingungen.

$$u(0) = 0; \quad \dot{u}(0) = 1$$

Weil zwischen u' und u'' eine Proportionalität besteht, wählen wir einen Exponentialansatz.

$$u(t) = e^{\lambda t} \rightarrow \dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t} \rightarrow \ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen in [Gl. 2] ergibt:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - 4e^{\lambda t} = 0 \quad y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \rightarrow y''(0) = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2$$

$$(\lambda^2 - 4)e^{\lambda t} = 0 \quad y''(0) - 4e^{\lambda t} = \lambda^2 - 4$$

$$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \{-2, 2\}$$

Der Term $\lambda^2 - 4 = 0$ wird als *charakteristische Gleichung* (oder charakteristisches Polynom) bezeichnet. Es ergeben sich zwei Lösungen:

$$u_1(t) = e^{2t} \quad \text{und} \quad u_2(t) = e^{-2t}$$

Infolge der Linearität der Dgl. erhalten wir als *allgemeine Lösung*:

$$u(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

Die Anfangsbedingungen erzeugen ein lineares Gleichungssystem mit den beiden Parametern C_1 und C_2 . Siehe dazu Proß, Imkamp: Brückenkurs Mathematik für den Studieneinstieg (Seite 230 f).

³ <http://statistik.wu-wien.ac.at/~leydold/MOK/HTML/node185.html>

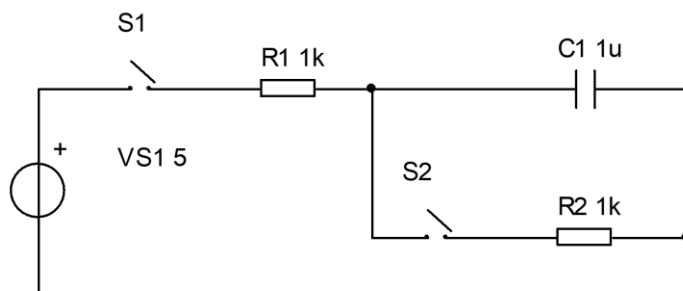
Die *spezielle Lösung*, die den gegebenen Anfangsbedingungen genügt, lautet:

$$u(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

4 Praxisbeispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen

4.1 Schaltvorgänge im Gleichstromkreis

Bei geschlossenem Schalter S1 fließt solange ein Strom (i) durch den Widerstand R1, bis der Kondensator (C1) geladen ist.



$$i = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad [\text{Gl. 3}]$$

i = Strom zum Zeitpunkt t
 u_C = Kondensatorspannung
 C = Kapazität

Abb. 2: RC-Netzwerk

Mit dem Schalter S2 lässt sich der geladene Kondensator über den Widerstand R2 entladen.

Der zeitabhängige Strom folgt einer e-Funktion.

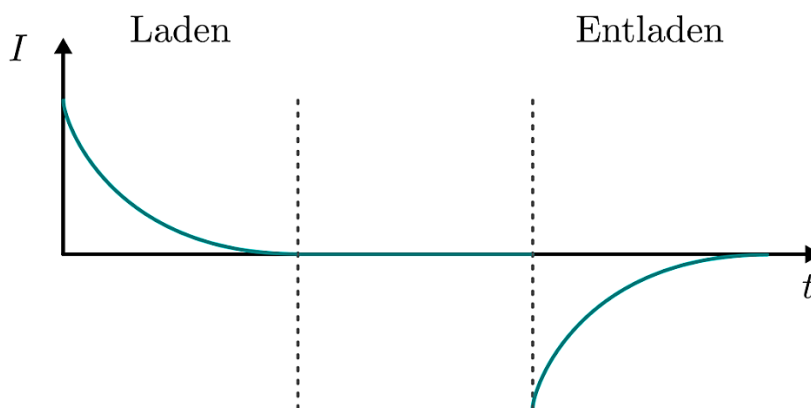


Abb. 3: Stromverlauf beim Laden oder Entladen eines Kondensators

Durch Umformung von [Gl. 3] erhalten wir für den zeitabhängigen Strom:

$$i(t) = -RC \cdot \frac{di}{dt} \quad [\text{Gl. 4}]$$

Mit dem Ansatz $i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ formen wir obige DGL um:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Eingesetzt in [Gl. 4] bekommen wir:

$$A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -RC \cdot \frac{-A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Nach Kürzen von A und e-Funktion verbleibt:

$$1 = \frac{RC}{\tau} \rightarrow \tau = RC \quad \tau \text{ wird als } \textit{Zeitkonstante} \text{ des RC-Gliedes bezeichnet}$$

A ergibt sich aus der Anfangsbedingung:

$$I_0 = A \cdot e^0 \rightarrow A \cdot e^0 = 1$$

Daraus folgt für den zeitabhängigen Strom:

$$i(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad I_0 \text{ ist der maximale Strom (kurz nach dem Betätigen des Schalters bei noch ungeladenem Kondensator)}$$

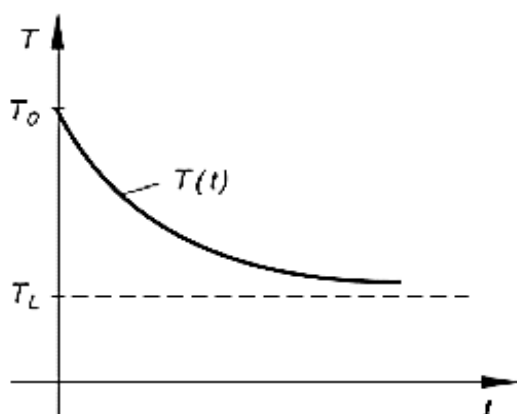
Die beiden Widerstände (1 kΩ) bestimmen zusammen mit der Kapazität (1 μF) die Zeitkonstante (τ) des RC-Gliedes.

$$\tau = R \cdot C \rightarrow \tau = 10^3 \Omega \cdot 10^{-6} F = 10^{-3} s$$

Die Lade- bzw. Entladedauer beträgt ≈ 5τ und somit ca. 5 ms.

4.2 Das Newtonsche Abkühlungsgesetz

Gegeben sei eine kirschrot glühende Vollkugel (ϕ = 100 mm) aus Baustahl (St 37), welche sich durch langsam vorbei strömende Luft bis auf die Umgebungstemperatur von 20 °C abkühlt.



T	Temperatur zum Zeitpunkt t
T ₀ , T _A	Anfangstemperatur
T _L , T _U	Umgebungstemperatur
k	Proportionalitätsfaktor: k = α · A / (c · m)
α	Wärmeübergangskoeffizient
A	Wärme abstrahlende Fläche
c	Wärmekapazität (spezifische Wärme)
m	Masse

Abb. 4: Abkühlungskurve nach Newton⁴

Nach Newton gilt für die Abkühlungsgeschwindigkeit -dT/dt die folgende Differentialgleichung:

$$-T(t)' = k(T - T_U) \quad \text{[Gl. 5]}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Temperatur abnimmt.

In Exponentialschreibweise (e ist die Eulersche Zahl⁵) bekommt das Abkühlungsgesetz folgende Form:

$$T(t) = T_U + (T_A - T_U) \cdot e^{-kt}$$

⁴ Bildquelle: Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure (Bd. 1)

⁵ Die Eulersche Zahl ist die Basis der natürlichen Logarithmen: e = 2,7182...

Wie lange dauert es nun, bis sich die Temperatur der Kugel der Umgebungstemperatur angeglichen hat?

Um den Lösungsweg zu verstehen, sollen zunächst einige Grundkenntnisse aus der Schulmathematik aufgefrischt werden.

Rekapitulation elementarer Gesetzmässigkeiten:

$$a^x = e^{y}$$

Logarithmieren auf beiden Seiten und Anwenden der Rechenregeln ergibt:

$$\ln a^x = \ln e^y \rightarrow x \cdot \ln a = y \cdot \ln e \text{ bzw. } y = x \cdot \ln a$$

Daraus folgt:

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}$$

► Zunächst lassen sich folgende Parameter bestimmen:

- Aufgrund der Glühfarbe hat die Kugel zu Beginn eine Temperatur von ca. 720 °C
- Die Wärmekapazität c von Baustahl beträgt 480 J/(kg · K)
- Die Dichte ρ von Baustahl beträgt 7,8 kg/dm³
- Die Kugelmasse $m = \rho \cdot V$ bzw. $m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ beträgt 4,084 kg
- Die Kugeloberfläche $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ beträgt 0,0314 m²
- Die zugeführte Wärmemenge $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$ beträgt 1'372 kJ
- Der Wärmeübergangskoeffizient α beträgt ca. 20 W/(K · m²)

► Umformen von [Gl. 5] ergibt:

$$dt = -\frac{1}{k} \cdot \frac{dT}{T - T_U} \rightarrow t = -\frac{1}{k} \cdot \int \frac{dT}{T - T_U}$$

Nach der Regel $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ liefert das unbestimmte Integral:

$$t = -\frac{1}{k} \cdot \ln(T - T_U) + C \quad \text{[Gl. 6]}$$

Weil die Anfangstemperatur bekannt ist, lässt sich die Integrationskonstante C durch Einsetzen von 0 und T_A bestimmen.

$$0 = -\frac{1}{k} \cdot \ln(T_A - T_U) + C \rightarrow C = \frac{1}{k} \cdot \ln(T_A - T_U)$$

Nun wird C in [Gl. 6] eingesetzt:

$$t = -\frac{1}{k} \cdot \ln(T - T_U) + \frac{1}{k} \cdot \ln(T_A - T_U)$$

Ausklammern von $\frac{1}{k}$ ergibt:

$$t = \frac{1}{k} \cdot [\ln(T_A - T_U) - \ln(T - T_U)]$$

Gemäss der Rechenregel $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ lässt sich die Differenz auch als Bruch darstellen.

$$t = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{T_A - T_U}{T - T_U}$$

Um den hier unpraktischen Logarithmus loszuwerden, erheben wir das Produkt $k \cdot t$ zum Exponenten einer e-Funktion.

$$e^{kt} = \frac{T_A - T_U}{T - T_U}$$

Um die Temperatur T zur Zeit t zu bestimmen, werden die Variablen vertauscht; dazu ist der Kehrbuch auf beiden Seiten der Gleichung zu bilden.

$$e^{-kt} = \frac{T - T_U}{T_A - T_U} \rightarrow T(t) = T_U + (T_A - T_U) \cdot e^{-kt} \quad [\text{Gl. 7}]$$

► Um zu einem gültigen Resultat zu gelangen, benötigen wir noch den Betrag des Proportionalitätsfaktors. Das Problem dabei ist, dass wir den Zahlenwert von k nicht kennen. Wir erinnern uns jedoch an die Formel in Abb. 3, wonach gilt:

$$k = \alpha \cdot \frac{A}{c \cdot m}$$

Mit der zuvor getroffenen Annahme von $\alpha \approx 20 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$ lässt sich der Proportionalitätsfaktor berechnen. Wir erhalten für k einen Wert von 0,00032.

► Nun bestimmen wir nach [Gl. 7] die Temperatur der Stahlkugel zu einer bestimmten Zeit.

$$T(t) = 20 \text{ °C} + (720 \text{ °C} - 20 \text{ °C}) \cdot e^{-0,00032 \cdot n \cdot 3600} ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Das Übertragen obiger Wertpaare in ein Temperatur-Zeit-Diagramm führt uns zur Abkühlungskurve (Abb. 5). Für den empirischen Nachweis messen wir stündlich die Kerntemperatur der Stahlkugel.

Messwerte der Kugeltemperatur:

Nach 1 Stunde:	241,2 °C
Nach 2 Stunden:	89,9 °C
Nach 3 Stunden:	42,0 °C
Nach 4 Stunden:	30,0 °C
Nach 5 Stunden:	22,0 °C
Nach 6 Stunden:	20,7 °C
Nach 7 Stunden:	20,2 °C
Nach 8 Stunden:	20,1 °C

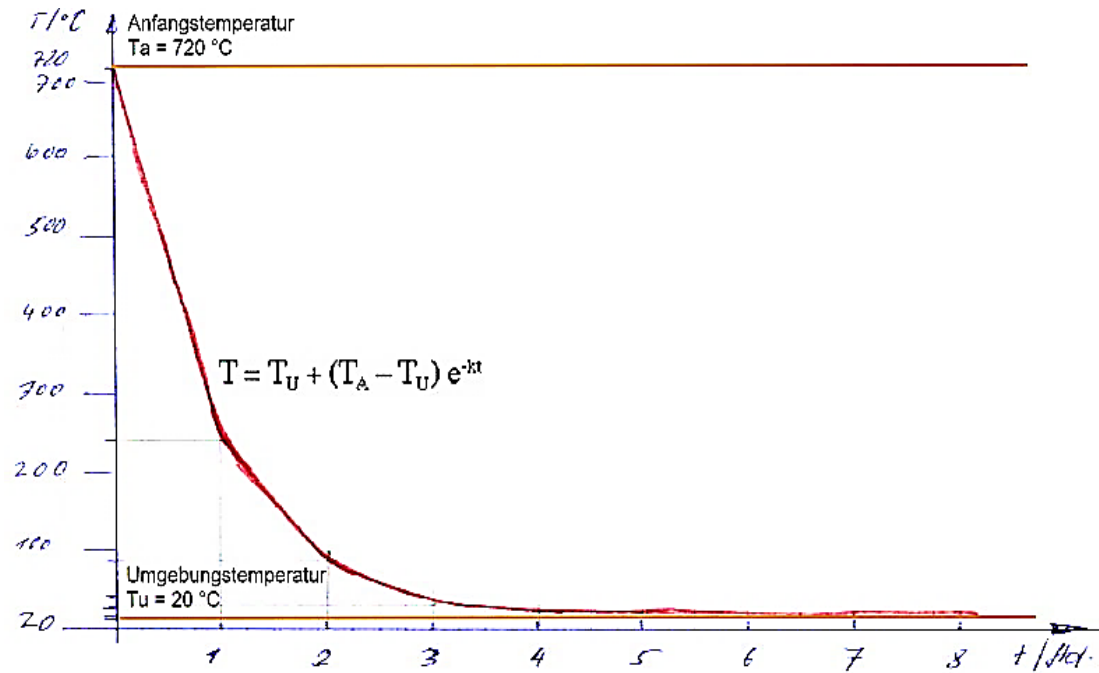


Abb. 5: Abkühlungskurve einer Stahlkugel

Fazit: Zunächst fällt der Funktionsgraph steil ab, um sich schliesslich asymptotisch der Umgebungstemperatur anzunähern. Die Änderungsrate folgt einer abklingenden e-Funktion.

4.3 Freier Fall mit Reibung

Welche Fallgeschwindigkeit erreicht ein Mensch nach einer bestimmten Zeit, der aus 4'000 m Höhe ohne Fallschirm aus einer Ballongondel fällt?

Bevor ich mich ans nackte Rechnen mache, überdenke ich ersteinmal in aller Ruhe die gestellte Aufgabe und deren reale Randbedingungen. Habe ich bereits ein ähnliches Problem gelöst, auf das ich zurückgreifen kann? Gibt es vergleichbare Beispiele aus Klausuren, an die ich mich erinnere? Glücklicherweise habe ich gerade nichts Konkretes zur Hand (ein Betty-Bossi-Rezept dürfte sowieso nicht aufzutreiben sein), so dass ich meine eigenen grauen Zellen ordentlich bemühen muss.

Frei nach Kuchling⁶ kommen mir die Fallgesetze des Herrn Galilei in den Sinn:

$$v = gt ; v = \sqrt{2gh}$$

Leider gelten diese Gesetze nur für den freien Fall im luftleeren Raum (nur dort fallen alle Körper gleich schnell). In der vorliegenden Aufgabe findet der Fall aber in der Atmosphäre, somit in Luft, statt. Also eine grundlegend andere Ausgangssituation. Ich überlege mir nun, wie das Weg-Zeit-Gesetz in modifizierter Form aussehen könnte. Eine "fertige Formel" gibt es dafür nicht.

Beim Fall durch die Atmosphäre muss ich den Strömungswiderstand der Luft berücksichtigen. Irgendwann werden sich - so meine Mutmassung - Gewichtskraft (F_G) und Luftreibungskraft

⁶ Horst Kuchling: Taschenbuch der Physik (Fachbuchverlag Leipzig).

(F_R) die Balance halten und es wird ein quasi-stationärer Zustand mit $F_G = F_R$ die Folge sein.

Bei kleinen Geschwindigkeiten strömt die Luft laminar (also ohne Wirbelbildung) am Körper vorbei. In diesem Fall macht sich die Stokes'sche Reibung bemerkbar.

$$F_S = -\eta \dot{z}$$

Bei grösseren Geschwindigkeiten wird die Strömung turbulent und es bilden sich Wirbel. Es tritt eine zusätzliche Kraft auf, die sogenannte Newton-Reibung, welche quadratisch von der Geschwindigkeit abhängt.

$$F_N = \frac{1}{2} c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \equiv k \cdot v^2$$

Wir müssen noch herausfinden, ob der unfreiwillige Fall aus der Ballongondel mit Newtonscher oder Stoke'scher Reibung stattfindet und entscheiden uns für eine turbulente Strömung mit $F_R \sim v^2$.

Übrigens unterscheidet sich ein Sprung ohne Fallschirm von einem mit Fallschirm prinzipiell nur durch den unterschiedlichen k-Wert.

Der Widerstandsbeiwert (c_w) muss aus Tabellen entnommen werden; er ist von der Körperform abhängig und wird im Strömungskanal ermittelt.

Gebräuchliche Standardwerte sind z.B.:

- Platte, von vorne angeströmt: $c_w = 1,1 \dots 1,3$
- langer Zylinder, radial angeströmt: $c_w = 1,2$
- langer Zylinder, stirnseitig angeströmt: $c_w = 1,0$
- Kugel: $c_w = 0,45$
- Halbkugel mit Boden, gegen die Bombierung angeströmt: $c_w = 0,4$
- Halbkugel mit Boden, gegen den Boden angeströmt: $c_w = 1,2$
- Halbkugel offen, gegen die konvexe Seite angeströmt: $c_w = 0,34$
- Halbkugel offen, gegen die konkave Seite angeströmt: $c_w = 1,3$
- stromlinienförmiger Körper: $c_w = 0,05$

a) Befindet sich der Fallende in der sog. X-Lage, nehmen wir einen c_w von 1,2; fällt er mit den Füßen oder mit dem Kopf voran, nehmen wir 0,8. Hat der Springer einen geöffneten Fallschirm, können wir mit einem c_w von $> 1,3$ rechnen.

b) Die Angriffsfläche, die der menschliche Körper der Luftströmung anbietet, kann ebenfalls gut abgeschätzt werden: zwischen 0,2 bis 0,8 m^2 - je nach Körperlage; somit durchschnittlich 0,5 m^2 .

c) Die Bestimmung der Dichte der Luft bereitet uns jedoch gewisse Schwierigkeiten, weil mit zunehmender Höhe exponentiell abnehmend. In 7 km Höhe beträgt sie nur noch die Hälfte.

Nur auf Meeresebene (bei 20 °C) hat ρ den Wert von 1.3 kg/m³. Vorerst gehen aber auch wir bei unserer Modellbildung von einer gemittelten Luftdichte von 90 % aus (behalten das Gesagte aber im Hinterkopf). Um ein physikalisches Verständnis für die gestellte Aufgabe zu erhalten, ist diese Näherung ausreichend. Ansonsten müssten wir unverzüglich eine numerische Lösung anbieten.

Die von uns in Betracht gezogenen Parameter betragen folglich:

$$c_w = 1,0$$

$$\rho = 1,17 \text{ kg/m}^3$$

$$A = 0,5 \text{ m}^2$$

Nun kann die Bewegungsgleichung aufgestellt werden:

$$m \cdot s''(t) = -mg + k \cdot s^2(t)$$

Das negative Vorzeichen ergibt sich aus dem Umstand, dass die Gewichtskraft der Reibungskraft entgegengesetzt ist. Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems erfolgt die Fallbewegung somit in negativer Richtung (d.h. nach $-z$).

Eine weitere Zwischenüberlegung: Wie verhält es sich mit der Gravitationsbeschleunigung? In 30 km Höhe bspw. weicht sie um ca. 1 % vom Standardwert ab, so dass wir sie für unseren Modellversuch als konstant annehmen.

Mit den getroffenen Annahmen können wir nun fortfahren, um die Geschwindigkeit $v(t)$ des Fallenden zu berechnen; dessen Masse betrage 80 kg.

Wir substituieren obige Gleichung und erhalten folgende Dgl.:

$$-mv'(t) = -mg + k \cdot v^2(t)$$

Durch weitere Vereinfachung erhalten wir:

$$v'(t) = g - k \cdot \frac{v^2(t)}{m}$$

Nachdem wir bereits auf dem richtigen Wege sind, machen wir eine grundsätzliche Überlegung:

Ist die Fallgeschwindigkeit noch sehr klein, kann der quadratische Term vernachlässigt werden. In diesem Fall nähme die Dgl. eine besonders einfache Form an, nämlich die des freien Falls ohne Luftreibung. Dieser Zustand ist aber nur kurz zu Beginn vorhanden.

Aus den vorherigen Überlegungen wissen wir, dass sich irgendwann ein Kräftegleichgewicht zwischen Gewichtskraft und Luftreibungskraft einstellt. Deshalb können wir darüber hinausgehend eine Endgeschwindigkeit $v_e = \text{const.}$ postulieren.

In die Dgl. eingesetzt bedeutet dies (wegen $v' = 0$):

$$g - k \cdot \frac{v^2(t)}{m} = 0$$

Was wir noch nicht wissen, ist der genaue Verlauf des Funktionsgraphen im v/t -Diagramm. Dazu müssen wir die Dgl. lösen. In anderer Notation geschrieben lautet diese:

$$\frac{dv}{dt} = g - k \cdot \frac{v^2}{m}$$

Nun trennen wir die Variablen und erhalten:

$$dt = \frac{dv}{g - k \cdot \frac{v^2}{m}}$$

Was nun folgt heisst Integration (der Mathematiker übe Nachsichtigkeit mit mir, es geht hemdsärmelig zu):

$$\int dt = \int_{t_0}^{t_e} \frac{dv}{g - k \cdot \frac{v^2}{m}} \quad \text{mit den Integrationsgrenzen } t_0 \text{ bis } t_e \text{ bzw. } v(t_0) \text{ bis } v(t_e)$$

Dazu suche man zunächst das Grundintegral (Bronstein, Bartsch) für:

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{b}{a}} x \quad \text{für } ab > 0$$

Sind die Anfangsbedingungen $t_0 = 0$ und $v(t_0) = 0$, so ergibt sich nach Auflösung nach v (und in der Hoffnung, die Klammern jeweils am richtigen Ort gesetzt zu haben):

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}} \cdot \tanh \sqrt{\frac{g \cdot k}{m}} \cdot t$$

Daraus folgt:

$$v_e = \sqrt{\frac{gm}{k}}$$

Diese Funktion hat einen Graphen, der sich nach einem kurzen linearen Anstieg zunehmend abflacht und asymptotisch der Endgeschwindigkeit annähert.

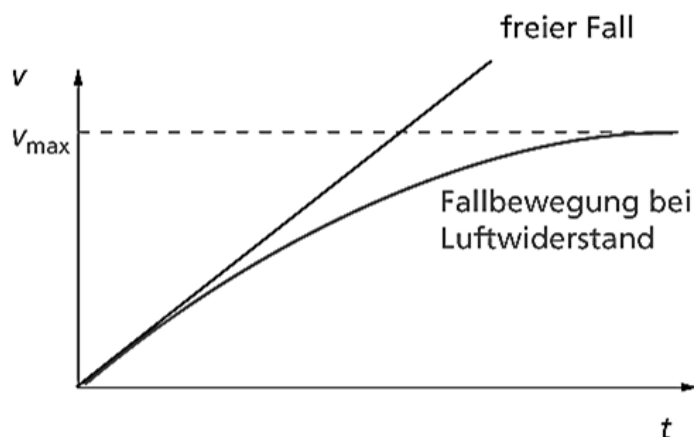


Abb. 6: Geschwindigkeitsverlauf beim freien Fall aus grosser Höhe⁷

Mit den angenommenen Parametern gelangt man auf eine Geschwindigkeit von rund 50 m/s

⁷ Bildquelle: <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/physik-abitur/>

(= 180 km/Std.). Solches steht in guter Übereinstimmung mit der Empirie.

Jedem Kenner der Materie dürfte klar sein, dass sich der reale Fall vom von uns skizzierten unterscheidet. Dafür gibt es verschiedene Gründe wie veränderte Körperhaltung, zunehmende Luftdichte, Luftströmungen usw. In grosso modo ist die analytische Lösung für den Anfang jedoch gelungen.

Es muss dann nur noch unterschieden werden zwischen "vor dem Öffnen des Fallschirms" und "nach dem Öffnen des Fallschirms" (falls einer vorhanden ist, ansonsten wird die Landung ziemlich hart). Beim Übergang von "geschlossen" nach "geöffnet" findet eine abrupte Parameteränderung statt, was den Kurvenverlauf wiederum beeinflusst. Moderne Fallschirme öffnen sich immerhin weniger ruckartig. Der geübte Springer versucht zudem, seine Geschwindigkeit vor dem Öffnen noch weiter zu verringern.

Nun könnten wir fortfahren, um auch noch die Gleichung für die Höhe zu einem bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen. Weil die Lösung der diesbezüglichen Dgl. (Weg-Zeit-Diagramm) sogar einfacher als das Zuvorgesagte ist, überlasse ich die Lösung – als nützliche Übung – gerne dem Leser.

Die obige analytische Lösung - das muss nachdrücklich betont werden - gilt nur für einen Sturz durch die Atmosphäre bei konstanter Luftdichte. Leider verlieren einige Lehrbuchautoren bereits hier den Überblick.

Um Lösungen bei variabler Luftdichte anzubieten, muss zur numerischen Integration gegriffen werden. Dafür fehlen uns hier aber die Werkzeuge. Für Experimentalphysiker dagegen sollte es das tägliche Brot sein.

Anm.: Die numerische Intergration bedient sich der Unterstützung eines CAS⁸ (z.B. Matlab, Maple, Mathcad u.a.). Gerade in Physik und Technik ist der numerische Lösungsweg oft der einzige, um komplexe Probleme in nutzbringender Zeit zu lösen. Letzlich handelt es sich hierbei um schrittweise Annäherungen (Iterationen) an die gesuchte Grösse. Die Ergebnisse eines Schrittes werden als Ausgangswerte des jeweils nächsten Schrittes genommen. Oder wie einer einmal sagte: Physik ist die Kunst der sukzessiven Approximation.

4.3 Harmonischer Oszillator

4.3.1 Masse-Feder-System als ungedämpfter harmonischer Oszillator

Ein harmonischer Oszillator ist ein schwingungsfähiges System, das sich durch eine lineare Rückstellgröße auszeichnet. Für ein mechanisches System bedeutet dies, dass es eine Kraft gibt, die einer zunehmenden Auslenkung mit proportional anwachsender Stärke entgegenwirkt.

Ein mechanischer Oszillator wie das Federpendel zeichnet sich durch eine schwingende Masse und eine dem Hookeschen Gesetz gehorchende Rückstellkraft aus, sobald die Masse aus der Ruhelage entfernt wird.

Die realiter vorkommende Reibung als auch eine antreibende Kraft werden hier vernach-

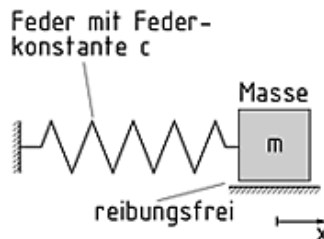
⁸ CAS = Computer Algebra System

lässt, so dass gilt:

$$F = -kx$$

Die Konstante k (manchmal auch mit D bezeichnet) ist die Federkonstante in N/m (als charakteristisches Mass für die "Federhärte").

Nach einem Anstoß von außen schwingt ein harmonischer Oszillator sinusförmig (d.h. harmonisch) um seine Ruhelage, wobei die Schwingungsdauer unabhängig von der Größe der Auslenkung ist.



Beispiele für harmonische Oszillatoren sind:

- Federpendel
- Stimmgabeln
- elektrische Schwingkreise

Abb. 7: Masse-Feder-System ohne Dissipation⁹

Die Beschleunigung der schwingenden Masse wird – wie in der Mechanik üblich – als die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit geschrieben.

$$F = m\ddot{x}$$

Daraus folgt die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für den freien ungedämpften harmonischen Oszillator:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{bzw.} \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

Fehlt hier nicht die Gewichtskraft ($-mg$)? Nein, denn diese bewirkt eine Dehnung der Feder bis zur Ruhelage. Weil $x(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage beschreibt, muss die Gewichtskraft in der Dgl. nicht berücksichtigt werden.

Um die Rechnung zu vereinfachen, teilen wir durch m , so dass die Masse wegfällt, und schreiben die Gleichung in eine geläufigere Form um; kx ersetzen wir durch $\omega_0^2 x$ wegen:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Damit erhalten wir die letztlich erwünschte Darstellung für den freien ungedämpften harmonischen Oszillator.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Dabei ist x die Auslenkung und ω_0 die Eigenkreisfrequenz des schwingenden Systems, welche unabhängig von der Amplitude ist.

Die allgemeine Lösung ist eine sinusförmige Funktion (auch harmonische Schwingung genannt).

$$x = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) \rightarrow x(t) = u \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Die Lösung enthält zwei Konstanten, die Amplitude (u) und den Nullphasenwinkel (φ_0), welchen man entsprechend den Anfangsbedingungen erhält. Der Phasenverschiebungswinkel bestimmt die Position und damit auch die Geschwindigkeit, welche der Massenkörper zu einem

⁹ Bildquelle: <https://glossar.item24.com/>

bestimmten Zeitpunkt besitzt.

Der Oszillator erzeugt folglich eine reine oder harmonische Schwingung. Für die Eigenfrequenz – mit welcher der Oszillator schwingt – gilt: $f_0 = \omega_0/2\pi$.

Die Gesamtenergie einer harmonischen Schwingung ist dem Quadrat der Amplitude proportional. Beim freien ungedämpften Oszillator bleibt die Energie erhalten, weil es sich um ein abgeschlossenes System handelt und nur konservative Kräfte auftreten.

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

Das "Dachsymbol" über der Variablen x bedeutet, dass die Auslenkung aus der Ruhelage maximal ist.

Beim Durchgang durch die Ruhelage $x(0)$ verschwindet die potentielle Energie und die kinetische Energie wird maximal. An den Umkehrpunkten A_1 resp. A_2 verschwindet die kinetische Energie und die potentielle Energie wird maximal.

$$\hat{E}_{kin} = \frac{1}{2}m\hat{v}^2 \quad ; \quad \hat{E}_{pot} = \frac{1}{2}k\hat{x}^2$$

4.3.2 Masse-Feder-System als gedämpfter harmonischer Oszillator

Die Bezeichnung harmonischer Oszillator wird in der Literatur auch bei Anwesenheit einer Dämpfung verwendet. Obwohl dann streng genommen keine harmonische Schwingung erfolgt, sondern eine gedämpfte und damit abklingende Schwingung.

Generell wird ein schwingendes System mit Dämpfung durch eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben.

$$my'' + Ry' + Dx = 0$$

R Reibungskraft (auch mit r oder γ bezeichnet)

D Federkonstante (auch mit k bezeichnet)

Ist eine antreibende Kraft vorhanden, spricht man von einer *erzwungenen Schwingung*, andernfalls von einer *freien Schwingung*.

$$my'' + Ry' + Dx = K(t) \quad \text{mit } K(t) \text{ als antreibender Zwangskraft}$$

Anm.: Eine mechanische Schwingung wie beim Federpendel ist in praxi nicht reibungsfrei. Das bedeutet, dass durch die Oszillation fortwährend Bewegungsenergie in Wärme umwandelt wird und die Amplitude daher abnimmt. Man spricht von einer gedämpften Schwingung, wodurch diese im Allgemeinen nicht länger harmonisch ist. Ein solches System ist nicht mehr konservativ, sondern *dissipativ*. Die Differentialgleichung muss deshalb mit einem Term für die Reibungskraft (R) ergänzt werden.

Ist die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit gilt:

$$y'' + \frac{R}{m}y' + \frac{D}{m}y = 0 \quad \text{[Gl. 8]}$$

Zur Vereinfachung werden folgende Termini eingeführt (ω_0 kennen wir bereits):

$$\text{Dämpfungsfaktor} \quad \delta \text{ (od. } \rho) = \frac{R}{2m} \quad \begin{array}{l} R \text{ Reibungskraft} \\ m \text{ schwingende Masse} \end{array}$$

Eigenkreisfrequenz¹⁰ $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ D Federkonstante

Durch abschliessende Umformung erhalten wir:

$$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = 0$$

Diese Differentialgleichung wird oft in der Form geschrieben:

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0$$

Mit dem Eulerschen Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$ erhalten wir:

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$$

Die "charakteristische Gleichung" lautet somit:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

In ursprünglicher Notation:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0 = 0$$

Zur Lösung der Dgl. für den gedämpften harmonischen Oszillator [Gl. 8] benötigen wir die Nullstellen der "charakteristischen Gleichung".

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Für eine gedämpfte Schwingung mit $\delta < \omega_0$ sind die Nullstellen komplex:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet daher:

$$y(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} ; C, \varphi \in \mathbb{R}$$

Die Schwingungsgleichung beschreibt die Eigenschwingung der gefederten und gedämpften Masse.

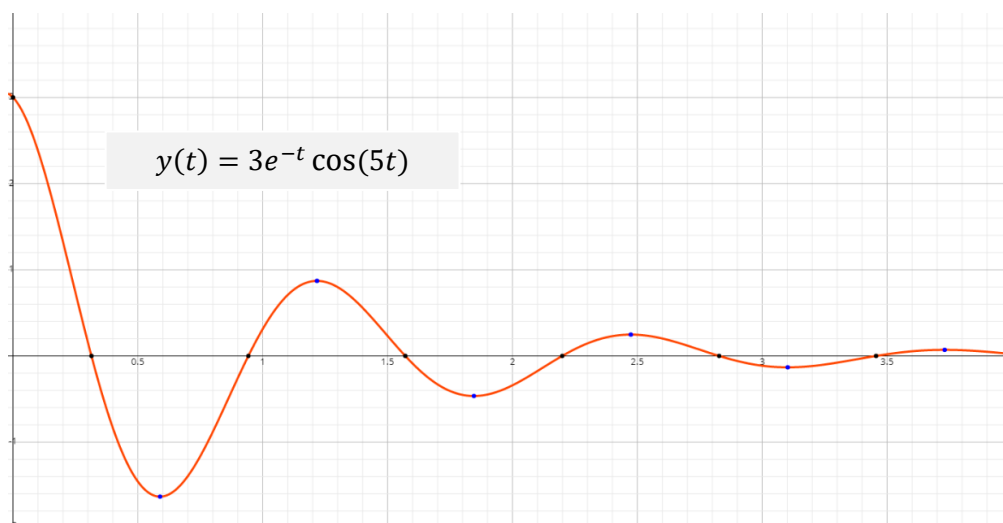


Abb. 8: Gedämpfte Schwingung

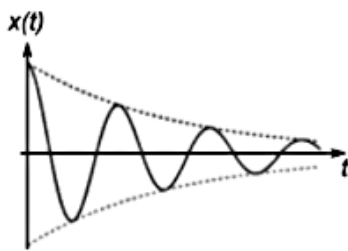
¹⁰ Häufig ist der Kürze wegen nur von der Eigenfrequenz ω_0 die Rede.

Es handelt sich um eine Sinusschwingung $y(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ mit einer im Allgemeinen veränderlichen Amplitude $u(t) = C e^{-\delta t}$.

Für den Sonderfall $\delta = 0$ (keine Dämpfung) bleibt die Amplitude konstant und die Schwingung ist harmonisch.

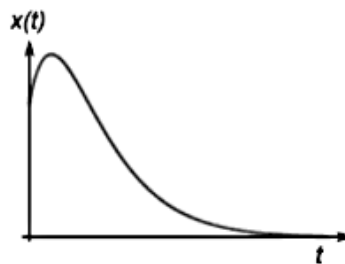
Grundsätzlich werden drei denkbare Varianten unterschieden:

a. schwache Dämpfung $\delta < \omega_0$



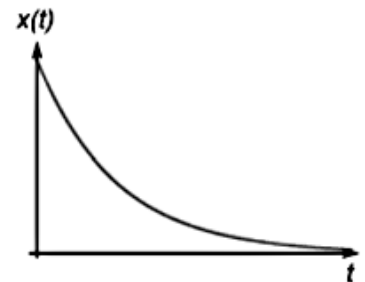
gedämpfte Schwingung (Amplitude exp. abnehmend)

b. kritische Dämpfung $\delta = \omega_0$



aperiodischer Grenzfall (Ruhelage wird schnell erreicht)

c. starke Dämpfung $\delta > \omega_0$



Kriechfall, monoton fallend (Ruhelage wird nur langsam erreicht)

Abb. 9: Oszillatorsysteme mit Dämpfung¹¹

a. System mit schwacher Dämpfung $\delta < \omega_0$

Die Amplitude nimmt nach einer e-Funktion ab und strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen Null.

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)$$

Mit der reduzierten Kreisfrequenz:
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

b. System mit kritischer Dämpfung $\delta = \omega_0$

Es bildet sich ein Extremum, um danach schnell auszuklingen.

$$x(t) = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad \text{für } \gamma = 2\omega_0 \text{ ergibt sich nur eine Lösung: } \lambda = -\frac{\gamma}{2}$$

c. System mit starker Dämpfung $\delta > \omega_0$

Infolge der starken Dämpfung ist die Periodizität der Schwingung nicht mehr erkennbar.

$$x(t) = C_1 e^{-\delta_1 t} + C_2 e^{-\delta_2 t} \quad \text{mit} \quad \delta_{1,2} = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Zur Vertiefung des Gesagten:

https://mathepedia.de/Harmonischer_Oszillator.html

https://beltoforion.de/de/harmonischer_oszillator/

¹¹ Bildquelle: Markus Otto, Rechenmethoden für Studierende der Physik im ersten Jahr (Springer Spektrum).

4.3.3 Elektrischer Schwingkreis

Auch ein elektrischer Schwingkreis, bestehend aus Spule (Induktivität) und Kondensator (Kapazität), ist ein harmonischer Oszillator. Während beim Federpendel eine periodische Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie stattfindet, erfolgt beim Schwingkreis ein periodischer Austausch der in Kondensator und Spule gespeicherten Feldenergie, bis diese schliesslich durch die unvermeidbaren Verluste aufgezehrt ist.

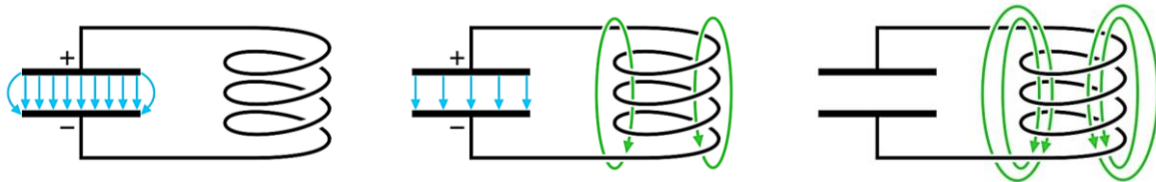


Abb. 10a: Elektrische Feldenergie wird in magnetische Feldenergie umgewandelt

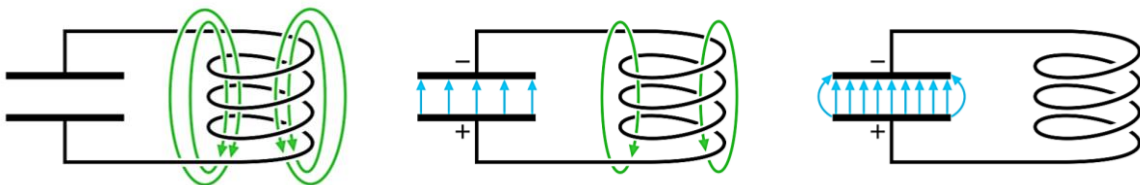


Abb. 10b: Magnetische Feldenergie wird in elektrische Feldenergie umgewandelt¹²

Soll die Schwingung aufrecht erhalten werden, muss dem Schwingkreis periodisch Energie zugeführt werden (vergleichbar mit einer Kinderschaukel, wo in rhythmischen Abständen ein Stoss erteilt wird). In diesem Fall spricht man von einem getriebenen gedämpften Oszillator.

Zur Erzeugung harmonischer bzw. sinusförmiger Schwingungen werden in der Nachrichtentechnik rückgekoppelte Oszillatoren benutzt.

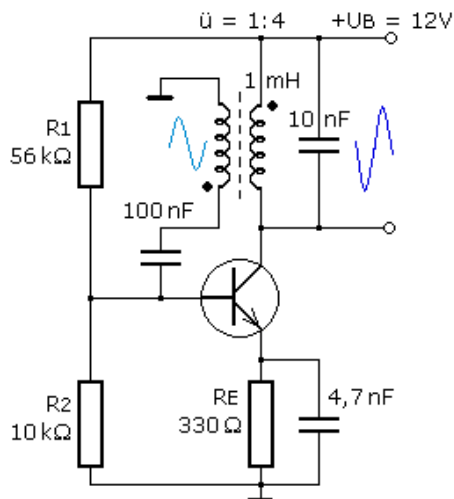


Abb. 11: Meissner-Oszillator in Emittergrundschtung¹³

Der Oszillator schwingt sich nach dem Einschalten selbsttätig ein.

Die Oszillatorfrequenz kann mit der Thomson'schen Schwingungsformel berechnet werden:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 50 \text{ kHz}$$

L Induktivität in Henri [1 H = 1 Vs/A]

C Kapazität in Farad [1 F = 1 As/V]

Als Resonanzfrequenz f_0 bezeichnet man die Frequenz, bei der die Amplitude maximal wird.

Es ist darauf zu achten, dass keine "Resonanzkatastrophe" eintritt. Bei diesem eher seltenen Phänomen wächst die Amplitude über alle Grenzen und es kommt meist zur Beschädigung des

¹² Bildquelle: <http://www.dokspeicher.de/>

¹³ Bildquelle: <https://www.elektroniktutor.de/signalkunde/meissner.html>

Systems. Ein bekanntes Lehrbeispiel ist die Zerstörung der Tacoma-Narrows-Brücke im US-Bundesstaat Washington durch vom Wind angefachte Schwingungen.

Spule und Kondensator zeichnen sich durch einen frequenzabhängigen Blindwiderstand aus. Im Resonanzfall sind die beiden Blindwiderstände X_L und X_C gleich gross. Aufgrund der Phasendifferenz kompensieren sie sich zu Null. Übrig bleibt nur der Wirkwiderstand, den wir uns als ohmschen Widerstand der Spulenwicklung (Reihenschaltung) oder als Verlustwiderstand des Kondensators (Parallelschaltung) vorstellen können.

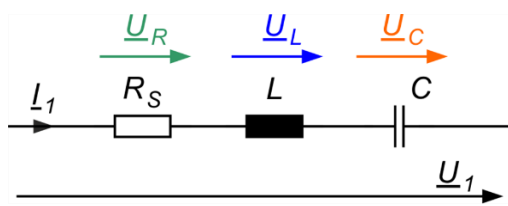


Abb. 12: Reihenschwingkreis¹⁴

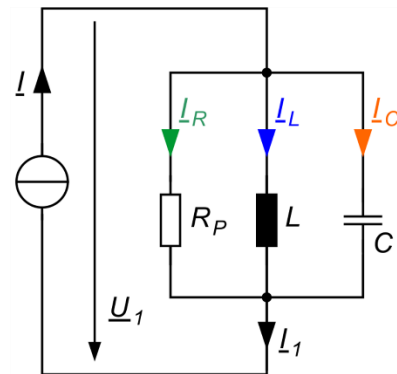


Abb. 13: Parallelschwingkreis

In Abb. 12 ist ein Reihenschwingkreis zu erblicken. Bei kleinem R_S fließen bei Resonanz grosse Ströme! Die Spannungen an den Blindwiderständen können daher Werte annehmen, die ein Vielfaches der Quellenspannung betragen. Es ist von Spannungsüberhöhung die Rede. Bei starterlosen Leuchtstofflampen wurde dieser Effekt gezielt zur Zündung der Röhren genutzt.

Abb. 13 zeigt einen Parallelschwingkreis. Im Resonanzfall ist nur der Verlustwiderstand R_P wirksam. Weil dieser in der Regel gross ist, fliesst in den Leitungen zwischen Stromquelle und den beiden Knotenpunkten praktisch kein Strom. Im Kreisinnern dagegen kann die Stromstärke auf ein Vielfaches des sonst üblichen Wertes ansteigen. Es ist von Stromüberhöhung die Rede. In Schaltanlagen mit grossen Strömen kann dies verheerende Auswirkungen haben.

¹⁴ <https://www.eit.hs-karlsruhe.de/hertz/quicklink/startseite.html>

5 Lernquellen und Hilfsmittel

5.1 Fachliteratur

Uwe Post: Fit fürs Studium Mathematik (Rheinwerk)

Harald Schmid: Höhere Technomathematik (Springer Spektrum)

Harro Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen (Teubner)

Thorsten Imkamp, Sabrina Proß: Differentialgleichungen für Einsteiger (Springer Spektrum)

Lothar Papula: Mathematische Formelsammlung (Springer Vieweg)

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler (Springer Vieweg)

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Anwendungsbeispiele (Springer Vieweg)

5.2 Weblinks

<https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/>

<https://matheplanet.com/matheplanet/>

<https://mathepedia.de/Mathematik.html>

<http://www.mathematik.net/homepage/differentialgleichungen.htm>

<https://studyflix.de/mathematik/thema/differentialgleichungen-215>

5.3 Tools

<https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>

<http://maxima.sourceforge.net/de/>

<https://www.symbolab.com/>