Komplexe Zahlen und ihre Anwendung in der ET

1 Grundsätzliche Bedeutung der komplexen Zahlen

Wie soll die folgende Gleichung gelöst werden?

$x^2 + 1 = 0$

Um eine Lösung zu finden, müssen die reellen Zahlen durch Einführung imaginärer Zahlen zu den komplexen Zahlen erweitert werden.

$\underline{z} = a + bi$

Als *imaginäre Einheit* gilt per definitionem:

$i = \sqrt{-1}$; daraus folgt:

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^2 \cdot i^2 \cdot i = i$

Ein Wurzelterm mit negativem Radikanden lässt sich nun wie folgt auflösen:

$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot \sqrt{-1} = 2i$

Das Produkt zweier imaginärer Zahlen ist stets reell.

Anm.: Um Verwechslungen mit der Stromstärke zu vermeiden, benutzen Elektrotechniker für die imaginäre Einheit anstelle von i den Buchstaben j und schreiben anstelle von bi stets jb.

Im Unterschied zu den reellen Zahlen (die sich auf der horizontalen Zahlengeraden befinden), sind komplexe Zahlen Punkte in der komplexen Ebene. Ihre Lage ist gegeben durch den Realteil (Re) und den Imaginärteil (Im) der komplexen Zahl $\underline{z}$.

Re($\underline{z}$) = a Im($\underline{z}$) = b $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Komplexe Zahlen lassen sich auf verschiedene Weise darstellen, nämlich:

Algebraische Notation	Trigonometrische Notation	Exponentielle Notation
Gaußsche Darstellung	Goniometrische Darstellung	Eulersche Darstellung
$\underline{z} = a + bi$	$\underline{z} = (\cos\varphi + j\sin\varphi)$	$\underline{z} = r \cdot e^{i\varphi}$

Anm.: In einigen Darstellungen finden wir z in Frakturschrift. Anstelle von $\underline{z}$ wird auch $\tilde{z}$ verwendet. In einem Buch der Regelungstechnik ist dem Schreibenden auch $\hat{z}$ begegnet. Weil das "Dach"-Zeichen ansonsten den Scheitelwert einer sinusförmigen Grösse charakterisiert, raten wir von letzterer Verwendung ab.

a) Die algebraische Notation (auch als Komponentenform oder kartesische Darstellung bezeichnet) wird zur Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen verwendet (Abb. 1-1).

b) Die trigonometrische Notation (auch als goniometrische Darstellung bezeichnet) wird zur Umrechnung zwischen der Normal- und der Exponentialform verwendet (Abb. 1-2).

c) Die exponentielle Notation (auch als Eulersche Darstellung bezeichnet) wird zur Multiplikation und Division von komplexen Zahlen verwendet. Die Multiplikation ist in der komplexen Ebene eine "Drehstreckung".

Die drei Darstellungsarten sind gleichberechtigt und ineinander umrechenbar; b) und c) gehören zur polaren Darstellungsform.

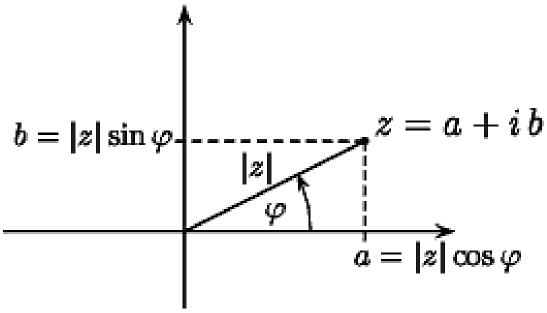


Abb. 1-1
Koordinatendarstellung der komplexen Zahlen

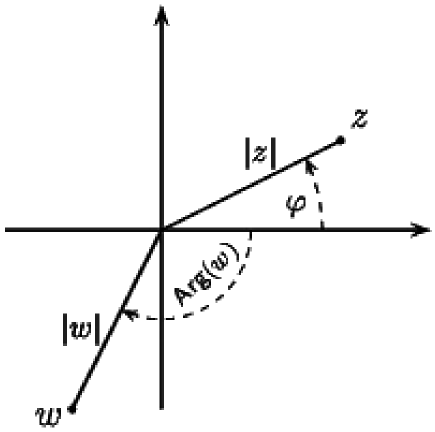


Abb. 1-2
Trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen

1.1 Gaußsche Darstellung einer komplexen Zahl

In kartesischen Koordinaten lautet die Notation einer komplexen Zahl $\underline{z}$ nach "Elektrotechnikerart" wie folgt:

$\underline{z} = a + jb$

Die komplexe Zahl – als Bildpunkt P(x, y) in der komplexen Ebene – ist durch den Ortsvektor $\overline{OP}$ eindeutig bestimmt (Abb. 1-3).

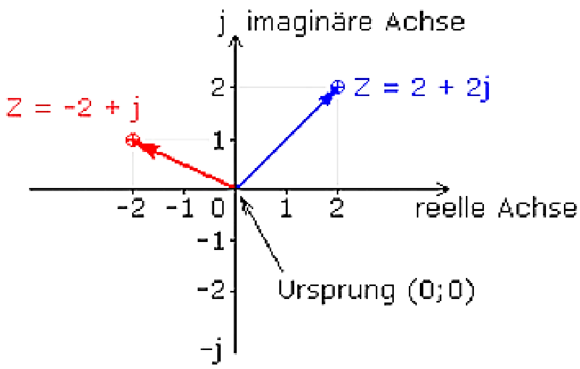


Abb. 1-3
Komplexe Ebene (auch als Gaußsche Zahlenebene bezeichnet)[1]

Der Betrag – und damit die Länge des Zeigers – wird mit dem Satz des Pythagoras ermittelt.

$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Man nennt $\underline{z}^*$ die komplex konjugierte Zahl; diese entsteht durch Spiegelung der komplexen Zahl an der reellen Achse. Betrag und Realanteil bleiben bei der Konjugation unverändert.

[1] Bildquelle: http://elektroniktutor.de/fachmathematik/komplex.html

Beim Imaginäranteil erfolgt ein Vorzeichenwechsel.

$\underline{z}^* = a - jb$

Rechenbeispiele:

1) Bei der Addition von komplexen Zahlen werden Real- und Imaginärteile gesondert (d.h. jeweils für sich) addiert. Der Betrag der resultierenden komplexen Zahl wird mit dem pythagoreischen Lehrsatz bestimmt.

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (5 + j2) + (-3 - j4) = (5 - 3) + j(2 - 4) = 2 - j2$$

$$|\underline{z}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2{,}828$$

2) Bei der Division zweier komplexer Zahlen in algebraischer Notation wird der Bruch mit dem konjugiert-komplexen Nenner erweitert, um dadurch einen reellen Nenner zu bekommen.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$$

$$\frac{4 + 3i}{2 + 2i} = \frac{4 + 3i}{2 + 2i} \cdot \frac{2 - 2i}{2 - 2i} = \frac{8 - 8i + 6i - 6i^2}{4 - 4i + 4i - 4i^2} = \frac{14 - 2i}{8} = 1{,}75 - 0{,}25i$$

1.2 Trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl

Bei dieser Darstellung ist $\underline{z}$ durch einen Zeiger der Länge r und einen Winkel (φ) eindeutig bestimmt (Abb. 1-4). Der Betrag von $\underline{z}$ wird als *Modul* der komplexen Zahl bezeichnet. Das Bogenmaß des Winkels, den der Zeiger mit der positiven reellen Achse bildet, ist das *Argument* der komplexen Zahl.

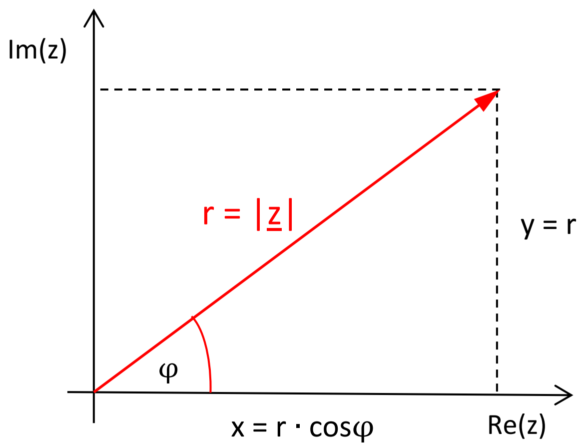


Abb. 1-4
Trigonometrische Darstellung komplexer Grössen

In Polarkoordinaten lautet die Notation einer komplexen Zahl $\underline{z}$ wie folgt:

$$\underline{z} = r \cdot \cos\varphi + j\, r \cdot \sin\varphi$$

$$\underline{z} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$r = |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(\underline{z}) = \arctan\frac{b}{a}$$

r Betrag von $\underline{z}$

φ Argument (Winkel, Phase) von $\underline{z}$ im Bogenmaß

Der Übergang zur konjugiert komplexen Zahl $\underline{z}$* entspricht einem Vorzeichenwechsel im Argument, während der Betrag unverändert bleibt.

Rechenbeispiel:

Die komplexe Zahl $\underline{z}$ = 3 + j2 soll in die goniometrische Form gebracht werden.

$$\angle\varphi = arctan\frac{y}{x} = arctan\frac{2}{3} = 33{,}69°$$

$$\left|\underline{z}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

$$\underline{z} = r(cos\varphi + jsin\varphi) = 3{,}606 \cdot (cos33{,}69° + jsin33{,}69°)$$

Die Probe ergibt:

$$\underline{z} = 3{,}606 \cdot (0{,}832 + j0{,}554) \approx 3 + j2$$

1.3 Eulersche Darstellung einer komplexen Zahl

Aus der *Eulerschen Identität* $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\ \sin\varphi$ folgt:

$$\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi} = r \cdot e^{j(\varphi\, +\, k\, \cdot\, 360°)}$$

Für die konjugiert komplexe Zahl gilt: $\underline{z}^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

Aus einem Spezialfall der Eulerschen Formel ergibt sich eine fundamentale Gleichung, in der die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π mit der imaginären Einheit i verbunden wird.

$$e^{i\pi} = i^2 \rightarrow e^{i\pi} = -1$$

Die Exponentialform ist vorteilhaft beim Multiplizieren, Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren komplexer Zahlen.

Rechenbeispiele:

1) Gegeben sind ein Strom $\underline{I} = 5{,}5\ \mathrm{mA}\ \cdot e^{j60°}$ und ein Widerstand $\underline{Z} = 5\ \mathrm{k\Omega} \cdot e^{j45°}$. Wie gross ist die anliegende Spannung?

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = \left(5 \cdot 10^3\ \Omega \cdot e^{j45°}\right) \cdot \left(5{,}5 \cdot 10^{-3}\mathrm{A}\ \cdot e^{j60°}\right) = 27{,}5\ \mathrm{V}\ \cdot e^{j105°}$$

2) Gegeben sind eine Spannung $\underline{U} = 110\ V \cdot e^{j90°}$ sowie ein Widerstand $\underline{Z} = 500\ \Omega \cdot e^{j0°}$. Wie gross ist die Stromstärke?

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{110\ \mathrm{V} \cdot e^{j90°}}{500\ \Omega \cdot e^{j0°}} = 0{,}22\ \mathrm{A}\ \cdot e^{j90°}$$

2 Verwendung der komplexen Zahlen in der Elektrotechnik

Zur mathematischen Behandlung von linearen Netzwerken eignen sich unterschiedliche Verfahren. Bekannt ist die geometrische Addition von elektrischen Grössen (Strom, Spannung, Impedanz, Admittanz) bei einfachen Schaltungen. Bei komplizierteren Schaltungen ist die geometrische Methode aber schwierig zu handhaben. Geeigneter ist in diesem Falle die von Charles P. Steinmetz (1865-1923) in die Wechselstromtechnik eingeführte "symbolische Schreibweise", die sich der komplexen Zahlen bedient. Generell gilt bei der komplexen Wechselstromrechnung, dass sinusförmige Grössen mit derselben Winkelgeschwindigkeit bzw. Kreisfrequenz eingesetzt werden.

2.1 Zeigerdarstellung von Wechselstromgrössen

Der eulersche Faktor $e^{j\omega t}$ entspricht in der komplexen Ebene einem Zeiger der Länge 1, welcher mit der Winkelgeschwindigkeit ω im Gegenuhrzeigersinn rotiert (Abb. 2-1). Gelegentlich ist auch von einem Drehzeiger (Dreher) oder *Versor* die Rede. Ein fester bzw. ruhender Zeiger wie die komplexe Amplitude wird in der Elektrotechnik als *Phasor* bezeichnet.

Ein Zeiger ist eine komplexwertige Grösse und sollte nicht mit einem Vektor verwechselt werden. Die Spannung $\underline{u}$ bspw. ist ein Skalar und kein Vektor. Zeiger dürfen aber wie Vektoren geometrisch addiert werden.

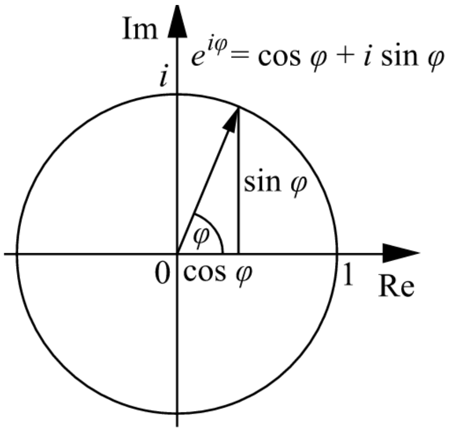


Abb. 2-1
Anwendung der Eulerschen Identität[2]

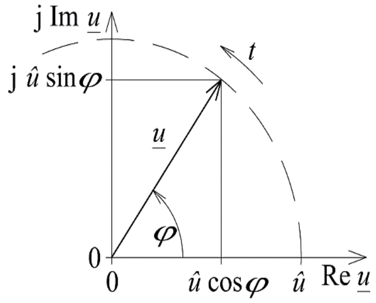


Abb. 2-2
Spannung $\underline{u}$ als rotierender Zeiger[3]

Eine sinusförmige Spannung $\underline{u}$ (Abb. 2-2) wird nach der Eulerschen Methode wie folgt geschrieben:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t)}$$

$\underline{u}(\mathrm{t})$	komplexer Momentanwert
$\hat{\mathrm{u}}$	reelle Amplitude (Scheitelwert)
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega \mathrm{t})}$	rotierender Einheitszeiger

Jede Sinusschwingung kann durch eine komplexe Zahl beschrieben werden, welche auch die Frequenz enthält. Der zeitabhängige Zeiger rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

Die obige Gleichung wird dann wie folgt geschrieben:

[2] Bildquellen: https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Formel
[3] Ebd.

$\underline{u} = \hat{u}\angle\varphi$

Gelesen als: u ist gleich $\hat{u}$ Versor φ (wobei $\hat{u}$ der Betrag und φ das Argument der komplexen Grösse ist). Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass man keinen Exponenten hinschreiben muss.[4]

Weil es sich bei sinusförmigen Signalen um zeitperiodische Vorgänge handelt, lassen sich die betreffenden Grössen als rotierende Zeiger behandeln (Abb. 2-3). Der resultierende Zeiger rotiert mit derselben Winkelgeschwindigkeit, wenn die beteiligten Grössen dieselbe Frequenz besitzen.

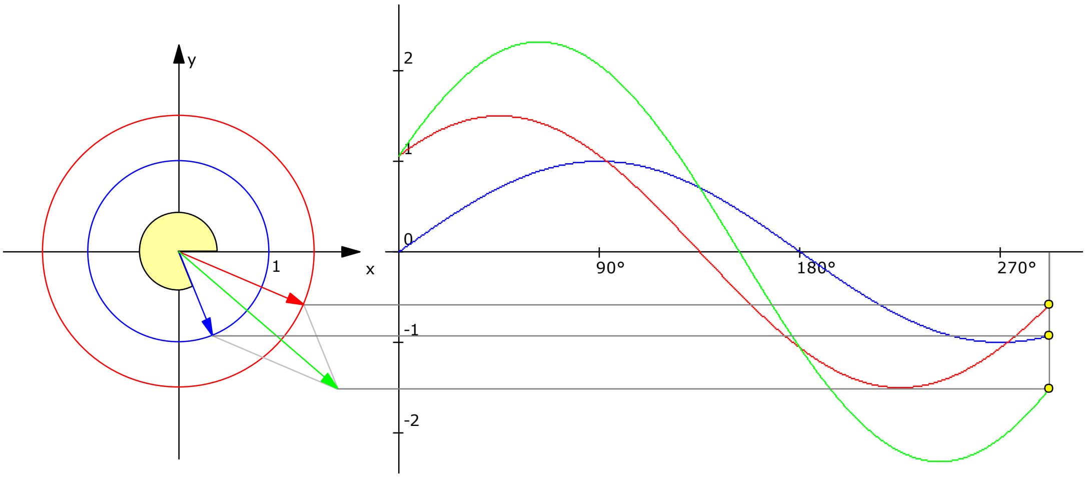


Abb. 2-3
Zeigerdarstellung harmonischer Schwingungen mit Übertragung ins Liniendiagramm

2.2 Komplexe Wechselstromrechnung

2.2.1 Impedanz

In realen Schaltungen kommen ausser Wirkwiderständen auch sog. Blindwiderstände vor. Als Blindwiderstand oder Reaktanz werden Komponenten bezeichnet, deren Widerstand von der Frequenz abhängig ist. Wir unterscheiden zweierlei Formen des Blindwiderstandes. Zum einen die Induktanz, die von einer Induktivität abstammt, zum anderen die Kapazitanz, deren Name von der Kapazität abgeleitet wurde.

Induktivitäten sind z.B. Spulen, Drosseln und Transformatoren, somit Bauteile, die magnetische Felder erzeugen. Kapazitäten sind Kondensatoren, die elektrische Felder erzeugen. Auch lange und parallel geführte Leitungen bilden Kapazitäten. Weil die Feldenergie beim Abbau des Feldes an die Quelle zurückgeht, ist von "Blindenergie" die Rede. Über eine Periode integriert wird bei der idealen Reaktanz keine Energie "verbraucht". Charakteristisch für sämtliche Reaktanzen ist, dass zwischen Spannung und Strom eine Phasenverschiebung von einer viertel Periode besteht.

In praxi verhält es sich so, dass auch eine Reaktanz gewisse Verluste verzeichnet, die durch ohmsche Widerstände hervorgerufen werden. Bei Spulen handelt es sich dabei um den Drahtwiderstand der Wicklung, bei Kondensatoren um den Verlustwiderstand im Dielektrikum. Eine

[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Versor

derartige Kombination von Wirk- und Blindwiderständen bezeichnen wir als **Impedanz** (Z) oder als Scheinwiderstand.

Wirkwiderstand (Gleichstromwiderstand) in Ohm [Ω]		ohmscher Widerstand	R
Induktiver Widerstand oder Induktanz	$X_L = j\omega L$	Reaktanz	$X = X_L - X_C$
Kapazitiver Widerstand oder Kapazitanz	$X_C = \frac{j}{\omega C}$		
Scheinwiderstand (Wechselstromwiderstand) in Ohm [Ω]		Impedanz	$\underline{Z} = R + jX$

2.2.2 RCL-Reihenschaltung

Weil die Teilspannungen nichtohmscher Widerstande (Induktivitäten, Kapazitäten) gegenüber dem gemeinsamen Strom um 90° phasenverschoben sind (und sich Widerstände proportional zu den Spannungen verhalten), dürfen wir die Widerstände geometrisch addieren. Zusammen mit dem Wirkwiderstand entsteht ein Widerstandsdreieck (Abb. 2-4b).

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

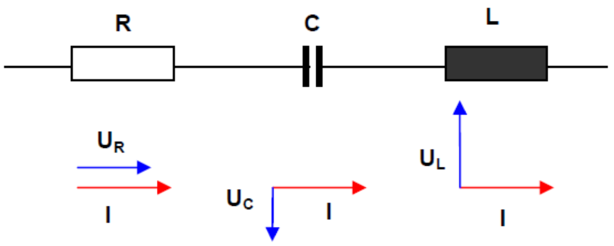


Abb. 2-4a
Zeigerbild von Spannungen und Strom

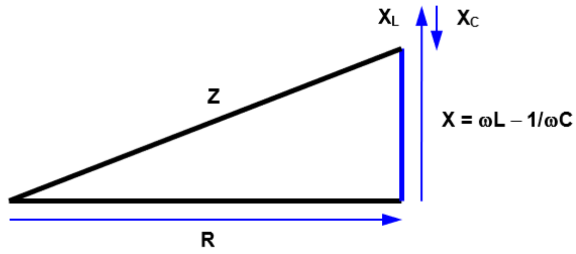


Abb. 2-4b
Widerstandsdreieck

2.2.3 Admittanz

Bisher sind wir von der Reihenschaltung von Wirk- und Blindwiderständen ausgegangen. Das muss nicht immer der Fall sein. Handelt es sich um eine Parallschaltung von Widerstanden, so müssen wir mit dem Wirkleitwert G und den Blindleitwerten X_L und X_C rechnen. Die resultierende Grösse heisst **Admittanz** (Y) oder Scheinleitwert.

Wirkleitwert in Siemens [S]		Konduktanz Kehrwert des Wirkwiderstandes		$G = \frac{1}{R}$
Induktiver Blindleitwert	$B_L = \frac{1}{j\omega L}$	Suszeptanz	$B = B_C - B_L$	$X = \frac{1}{B}$
Kapazitiver Blindleitwert	$B_C = \frac{\omega C}{j}$			
Scheinleitwert in Siemens [S]		Admittanz	$\underline{Y} = G + jB$	$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$

2.2.4 RCL-Parallelschaltung

Weil die Teilströme nichtohmscher Widerstande (Induktivitäten, Kapazitäten) gegenüber der gemeinsamen Spannung um 90° phasenverschoben sind (und sich Leitwerte proportional zu den Strömen verhalten), dürfen wir die Leitwerte geometrisch addieren. Zusammen mit dem Wirkleitwert entsteht ein Leitwertdreieck (Abb. 2-5b).

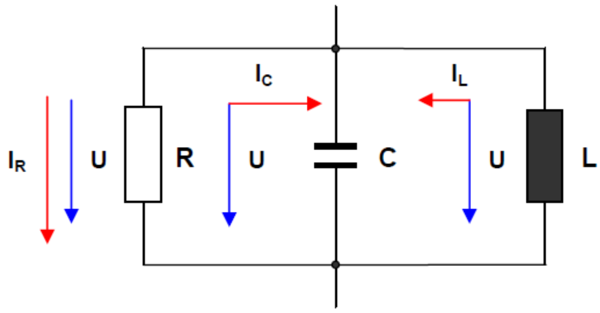


Abb. 2-5a
Zeigerbild von Strömen und Spannung

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

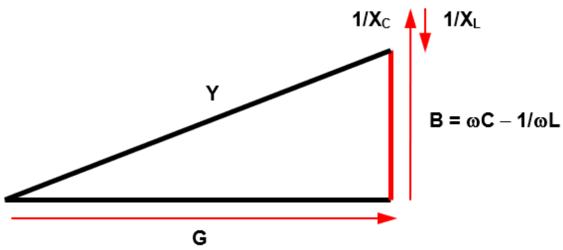
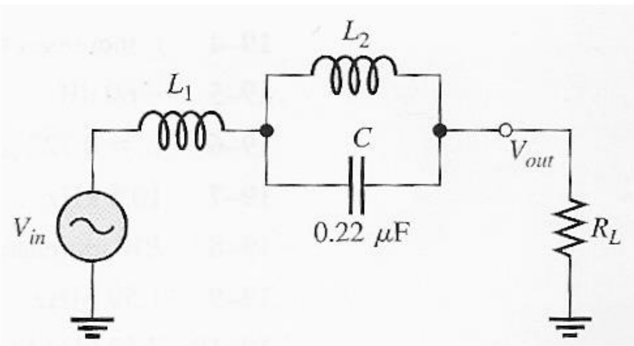


Abb. 2-5b
Leitwertdreieck

Résumé: Bei einfachen RCL-Netzwerken ist die geometrische Methode angezeigt, aber bei komplizierten Schaltungen wird es umständlich. In diesem Fall verwenden wir die komplexe Wechselstromrechnung (auch als symbolische Methode bezeichnet), um so schneller ans Ziel zu gelangen. Impedanzen und Leitwerte im Wechselstromkreis verhalten sich nämlich wie komplexe Grössen, d.h. dass sich reelle und imaginäre Anteile addieren lassen. Den Betrag der resultierenden Grösse, die Impedanz, erhalten wir durch Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes.

In praxi treffen wir meist eine Kombination von Reihen- und Parallelschaltung des komplexen Widerstandes an, so dass die Berechnung in Teilschritte gegliedert werden muss. Ein Hilfe ist uns der wissenschaftliche Taschenrechner (insofern dieser die komplexe Rechnung beherrscht).



Aufgabe:

Gegeben sei ein Netzwerk aus RCL-Gliedern. Berechne die Stromstärke, wenn die anliegende Spannung 100 V und sämtliche Widerstände 100 Ω betragen.

Zunächst bestimmen wir den Leitwert der Bauteile $L_2 \parallel C$.

$$Y_{res} = j(B_L - B_C) = j(100\,S - 100\,S) = 0\,S \;\rightarrow\; X_{res} = \infty$$

Danach addieren wir Real- und Imaginärteile zur resultierenden Impedanz.

$Z = R_L + (X_{res} + X_{L1}) = 100\ \Omega + j(\infty\ \Omega + 100\ \Omega) = 100\ \Omega + j\infty\ \Omega$

$|Z| = \sqrt{{R_L}^2 + X^2} = \sqrt{(100\ \Omega)^2 + (\infty\ \Omega)^2} = \infty$

$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{100\ V}{\infty\ \Omega} = 0\ A$

Fazit: Es fliesst kein Strom, denn das Parallelglied $L_2 \parallel C$ wirkt als Sperrkreis mit unendlich grossem Widerstand. Dies ist immer dann der Fall, wenn die kapazitiven und die induktiven Blindwiderstände gleich gross sind und somit Resonanz vorhanden ist.

3 Anhang

3.1 Eulersche Notation

Komplexe Zahlen lassen sich in unterschiedlicher Schreibweise darstellen. Eine davon ist die Eulersche Notation (auch Exponentialdarstellung genannt).

$e^{j(\varphi)} = \cos(\varphi) + j \cdot sin(\varphi)$

$e^{j(\varphi)}$ ist der normierte Drehzeiger im Einheitskreis.

Daraus folgt für die komplexe Grösse:

$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$

3.2 Phasor

Unter dem *Phasor* (Zeiger) versteht man die komplexe Amplitude in Form eines ruhenden Zeigers.

$\underline{Z} = Z \cdot e^{j(\omega t)}$

3.3 Versor

Als *Versor* (Dreher) bezeichnet man folgende Schreibweise:

$\angle\varphi = \cos(\varphi) + j \cdot sin(\varphi)$

Daraus folgt:

$\angle\varphi = e^{j(\omega t)}$

Der Drehwinkel (φ) wird als *Argument* von $\underline{Z}$ bezeichnet.

In praxi steht vielfach die abgekürzte Schreibweise:

$\underline{Z} = Z\angle\varphi$

4 Quellenverweise

4.1 Fachbücher

Heinz Rapp: Mathematik für die Fachschule Technik (Vieweg + Teubner)

Wilfried Weißgerber: Elektrotechnik für Ingenieure, 3 Bnd. (Springer Vieweg)

Wilfried Weißgerber: Mathematik zur Elektrotechnik für Ingenieure (Springer Vieweg)

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 3 Bnd. (Springer Vieweg)

4.2 Wikipedia

https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahl

https://de.wikibooks.org/wiki/Komplexe_Zahlen

https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Wechselstromrechnung