Differential- und Integralrechnung I

In diesem Beitrag werden die Prinzipien der beiden Zweige der Analysis (früher als Infinitesimalrechnung bezeichnet) aus der Sicht des Technikers betrachtet. Konkret sprechen wie hier von der Differential- und Integralrechnung.

Während es bei der Ableitung einer differenzierbaren Funktion erlernbare Regeln gibt, die immer zum Ziel führen, ist dies beim Integrieren nicht immer so einfach.

Nicht ohne Grund heisst es:

Differenzieren ist Handwerk, Integrieren aber ist Kunst!

Nachfolgend soll ohne mathematische Strenge der Versuch unternommen werden, dem lernwilligen Leser ohne langwierige Rechnereien das Wesentliche der Infinitesimalrechnung zu vermitteln. Rechnen kann man später, wenn es darum geht, die erforderliche Routine zu entwickeln.

Der grosse Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) soll einmal gesagt haben:

Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.

Nachfolgend wird daher mit einfachen Worten erklärt, was ein Differentialquotient oder ein Integral ist und wofür man diese Grössen in der Technik benötigt.

1 Differentialrechnung

1.1 Die Ableitung einer Funktion

Bei der Differentialrechnung geht es darum, die Steigung einer Funktion zu bestimmen. Es ist auch von der Ableitung die Rede. Abgeleitet resp. differenziert wird immer nach der unabhängigen Variablen (im Beispiel nach x).

Für einen Sekantenabschnitt (Abb. 1) ist die mittlere Steigung durch $\Delta y/\Delta x$ gegeben. Wir möchten es aber möglichst genau wissen und die Steigung exakt im Punkt $P\{x_0|f(x_0)\}$, an dem eine Tangente anliegt, berechnen. Ausgehend vom "charakteristischen Dreieck" (auch als Steigungsdreieck bezeichnet) lassen wir dieses in Gedanken immer kleiner werden, bis es schliesslich bei P unserem Blick entschwindet. Die Sekante nähert sich dabei immer mehr der Tangente an.

Die "Steigung" der Funktion $y = f(x)$ bei x_0 ist durch den Tangens dy/dx gegeben. Diesen erhält man, indem man den Differenzenquotienten $\Delta y/\Delta x$ immer kleiner werden lässt bis zum Grenzübergang (Limes) von Δx nach Null.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Aus den Differenzen Δy und Δx sind nun die *Differentiale* dy und dx geworden. Dabei handelt es sich um infinitesimale, d.h. verschwindend kleine Grössen, die sich im Grenzübergang nach Null befinden. Der Differenzenquotient wird auf diese Weise zum *Differentialquotienten*.

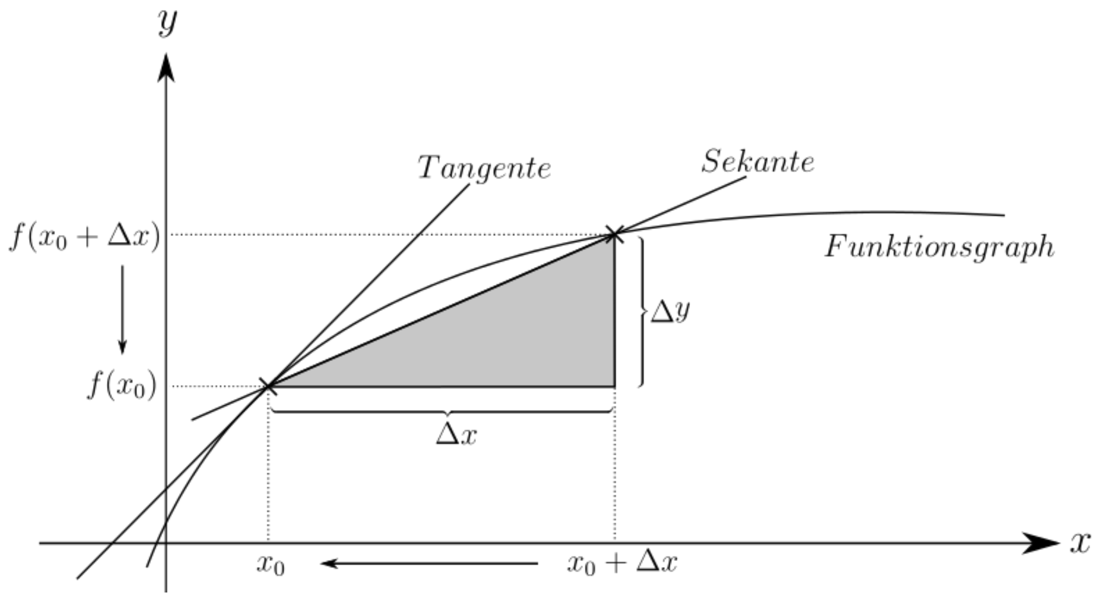


Abb. 1: Ableitung einer Funktion als Tangentensteigung[1]

Die Ableitung einer Funktion wird durch einen Hochstrich angezeigt. Zwei Hochstriche bedeuten zwei Ableitungen nacheinander.

Für unser Beispiel (Abb. 1) lautet die Funktionsgleichung:

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$$

In der Funktechnik wird anstelle der Steigung oft der Begriff "Steilheit" (S) verwendet. Diese gibt das Verhältnis von Anodenstromänderung zur Gitterspannungsänderung an.

$$S = \frac{dI_a}{dU_g} \qquad [\mathrm{mA/V}]$$

U_a = Anodenspannung = const.

In der Röhrenformel von *Barkhausen* werden drei Grössen, darunter die Steilheit, zusammengefasst.

$$S \cdot D \cdot R_i = 1 \qquad D = -\frac{dU_g}{dU_a}$$

R_i Innenwiderstand
D Durchgriff (Spannungsrückwirkung)
I_a Anodenstrom = const.

1.2 Wofür benötigen wir den Differentialquotienten in der Praxis?

Ein anschaulichess Beispiel ist ein startendes Auto, welches bei t = 0 aus dem Stand beschleunigt, bis die Höchstgeschwindigkeit erreicht ist. Wir gehen von einer geradlinigen Bewegung auf einer ebenen Fahrbahn aus. Die Beschleunigung soll stetig, d.h. ohne ruckartige Schaltphasen, verlaufen.

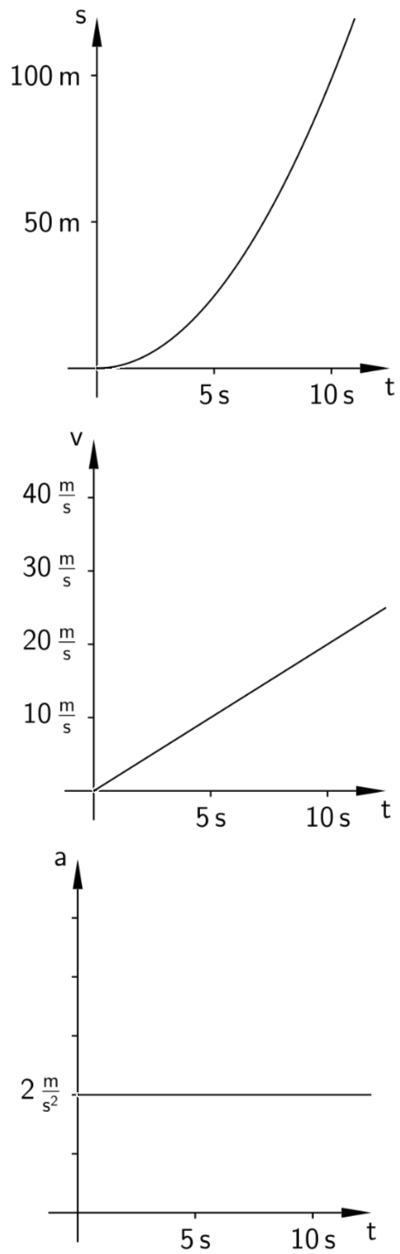
Anfänglich ist der pro Zeiteinheit zurückgelegte Weg gering. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird der Funktionsgraph steiler, um schliesslich beim Erreichen der maximalen Geschwindigkeit in eine Gerade überzugehen. Wenn wir genügend Messpaare für Weg und Zeit festgehalten haben, können wir mit einem Mathematikprogramm wie z.B. Maxima problemlos

[1] Bildquelle: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Differencial_quotient_of_a_function.svg

die Steigung der Funktion s(t) zu jedem Zeitpunkt anzeigen. Heraus kommt eine Funktion v(t) = s'(t) bzw. nach nochmaliger Ableitung a(t) = s''(t).

Die Geschwindigkeit ist demnach die erste Ableitung des Weges nach der Zeit, die Beschleunigung die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit.

Aus dem Physikunterricht in der Oberstufe sind die nachfolgenden Diagramme bei einigen Lesern sicherlich noch in guter Erinnerung.



a) **Weg-Zeit-Diagramm**
$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

b) **Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm**
$v = a \cdot t$

c) **Beschleunigungs-Zeit-Diagramm**
a = const.

Abb. 2: Kinematik-Diagramme bei gleichförmiger Beschleunigung[2]

In der Physik wird für Ableitungen nach der Zeit gerne eine bis auf Newton zurückgehende

[2] Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Kinematik

Die *Kinematik* ist ein Teilgebiet der Mechanik, das die Bewegung von Körpern auf der Basis von Zeit und Ort beschreibt – ohne Berücksichtigung einer zugrundeliegenden Kraft, Masse oder eines Impulses. Sollen letztere eingebunden werden, gelangt man zur *Dynamik*.

Schreibweise verwendet, indem anstelle des Ableitungszeichens (′) ein Punkt über dem betreffenden Symbol angebracht wird. Zwei Punkte über einem Symbol bedeutet folglich eine zweifach durchgeführte Ableitung nach der Zeit.

Wir gehen von den folgenden Beziehungen aus:

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} \qquad a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} \qquad a = \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

2 Integralrechnung

2.1 Das Riemann-Integral

Vereinfachend gesagt ist ein Integral nichts anderes als die Fläche unter der Kurve resp. zwischen einem Funktionsgraphen und der Abszisse. Die grundsätzliche Idee bei der Flächenbestimmung ist die Unterteilung der Fläche in viele Teilflächen (Rechtecke, Trapeze).

Im Kontext ist von einem *Riemann-Integral* die Rede. Eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals ist das Riemann-Stieltjes-Integral. Ausser dem Riemann-Integral gibt es das *Lebesgue-Integral*, durch welches die Integration von Funktionen auf beliebigen Maßräumen definiert ist.

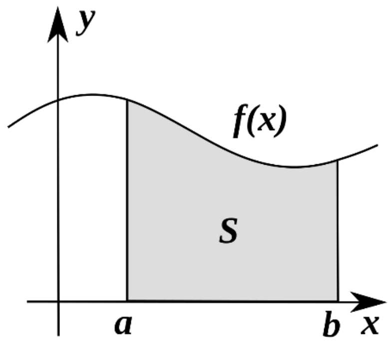


Abb. 3: Integral einer Funktion[3]

$$S(x) = \int_a^b f(x)dx$$

Der obige Ausdruck wird als bestimmtes Integral bezeichnet, gelesen als:

Integral f(x)dx von a bis b.

(b ist die obere, a die untere Integrationsgrenze)

Die Gleichung (Abb. 3) besagt, daß die Fläche (S) gleich dem Integral der Funktion f(x) im Intervall [a, b] ist. Als Integralzeichen dient ein stilisiertes bzw. auseinandergezogenes "S" (S von Summe), welches durch Leibniz in die Analysis eingeführt wurde. Newton, welcher eigentlich noch vor Leibniz auf die Infinitesimalrechnung gestossen ist, hat eine völlig andere Notation benutzt. Hinter dem Integralzeichen steht die zu integrierende Funktion bzw. der Integrand mit der Integrationsvariablen. Unter und über dem Integralzeichen stehen die Integriergrenzen (also in welchem Intervall integriert werden soll).

Beim unbestimmten Integral entfallen diese Grenzen.

$$F = \int f(x)dx$$

Der Mathematiker sagt dazu, dass F(x) eine *Stammfunktion* von f(x) sei. Für viele Funktionen sind die Stammfunktionen bekannt und können einer Tafel mit Stammintegralen (z.B. bei

[3] Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung

Bronstein oder Bartsch) entnommen werden.

Um die "Fläche unter der Kurve" exakt zu bestimmen, müssen wir diese in unendlich viele (infinitesimale) Rechtecke einteilen.

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Integrale können wir in drei Gruppen einteilen:

- unbestimmte Integrale
- bestimmte Integrale
- uneigentliche Integrale

Die uneigentlichen Integrale unterscheiden sich von den eigentlichen dadurch, dass die zu integrierende Funktion irgendwo eine Singularität bzw. Definitionslücke (z.B. eine Polstelle) aufweist oder dass sich das Integrationsintervall an einem oder beiden Enden ins Unendliche erstreckt.

Beispiele uneigentlicher Integrale:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \int_{a}^{-\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx$$

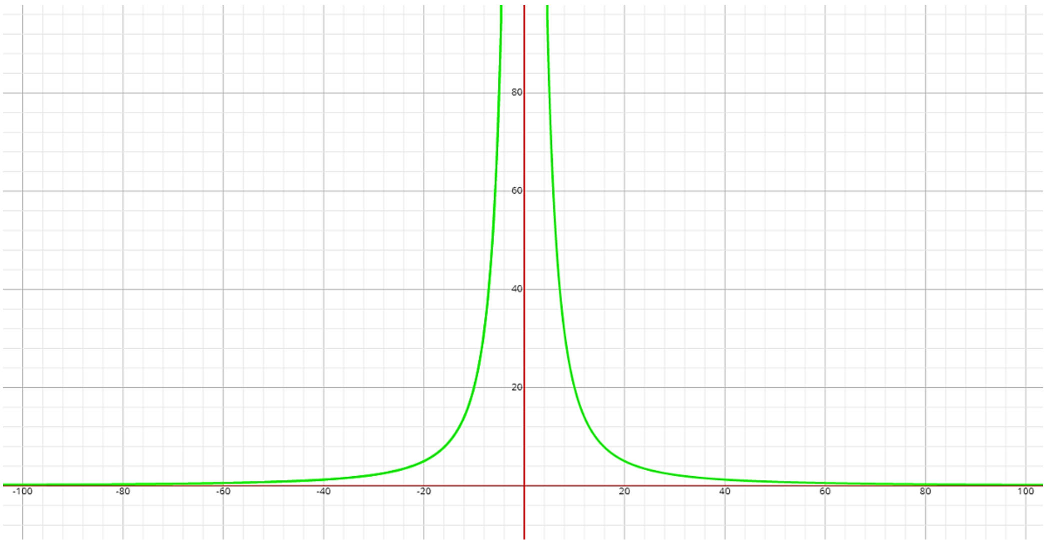


Abb. 4: Uneigentliches Integral

$F(x) = \int \frac{20}{x^2}\,dx$

Intervallgrenzen $[-\infty, 0\,] \cup [0, \infty]$

2.2 Flächenbestimmung

Bernhard Riemann (1826-1866) ging von einer beliebigen Zerlegung D des Intervalls [a, b] aus (Abb. 5). Anschliessend wird über alle Teilflächen (Riemann-Summen) summiert.

Einen vergleichbaren Lösungsweg finden wir bei der Jean Gaston Darboux (1842-1917) zugeschriebenen Methode (Abb. 6), wo Obersumme und Untersumme gebildet werden. Die Summen sind einzeln betrachtet also etwas grösser oder etwas kleiner als der wahre Wert der

Fläche. Die wahre Fläche wird durch möglichst kleine Teilsummen approximiert. Mit dem Grenzwert $\Delta x \to 0$ erhalten wir schlussendlich die wahre Fläche.

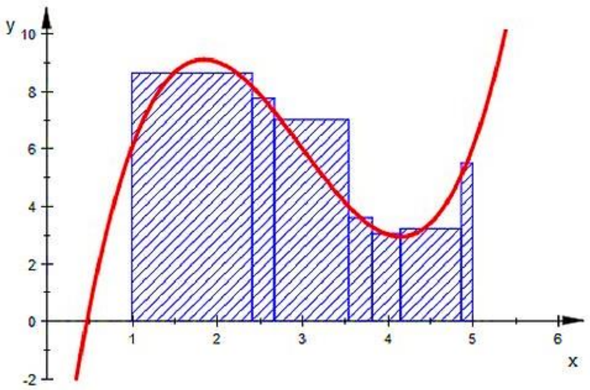


Abb. 5: Riemann-Summe der Zerlegung D und der Zwischenstellen

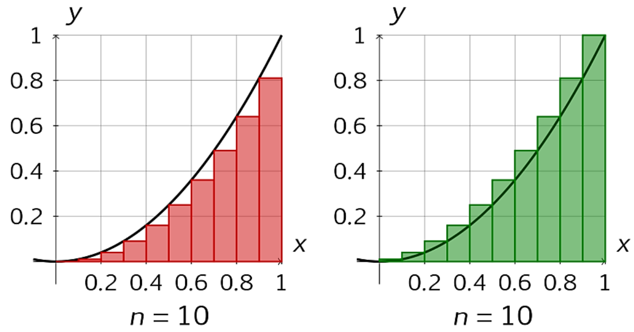


Abb. 6: Unter- und Obersumme bei der Flächenbestimmung nach Darboux

Anm.: Das Problem der Flächenbestimmung wurde schon von Archimedes (287-212 BC) in Angriff genommen.[4] Der aus Syracus stammende Mathematiker berechnete den Flächeninhalt unter einer Parabel. Archimedes konstruierte auch Kriegsgeräte (darunter Wurfmaschinen und Brennspiegel), die bei der Verteidigung der Stadt beim zweiten Punischen Krieg eingesetzt wurden.

Bei der Eroberung von Syracus wurde Archimedes, der in seine Betrachtungen versunken war, von einem römischen Legionär getötet. Zuvor soll er noch gesagt haben: *Noli turbare circulos meos* (Störe meine Kreise nicht). Nach Plutarch hatte sich Archimedes ein Grab mit der Darstellung von Kugel und Zylinder gewünscht, welche offensichtlich auf seine Abhandlung *perì sphaíras kaì kylíndrou* (Über Kugel und Zylinder) verweisen sollte.

2.3 Praxisbeispiel für die Anwendung eines Integrals

Integrale werden in der Technik deswegen verwendet, weil sich damit viele Praxisprobleme eleganter lösen lassen.

Gegeben sei ein Wasserbehälter, bei dem im Abflussrohr ein Handventil eingebaut ist. Beim Öffnen des Ventils fliesst zunächst nur wenig Wasser, doch mit zunehmender Öffnungsweite nimmt der Volumenstrom (Durchflussmenge pro Zeit od. Durchflussrate) unablässig zu.

$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \;\; bzw. \;\; \frac{dV}{dt}$$

2.3.1 Lineare Durchflussrate

Bei linear steigendem Durchfluss kann das entnommene Wasservolumen auf geometrischem Wege bestimmt werden.

Ist die Durchflussrate unbekannt, könnten wir sie durch "auslitern" ermittlen. Nach einer Sekunde beträgt die Durchflussrate im Beispiel 3 l/s. Sie nimmt mit dem Öffnen des Ventils gleichmässig zu, um bei voller Öffnung einen konstanten Wert – nämlich 12 l/s – anzunehmen.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Abb. 7) tragen wir auf der Abszisse (x-Achse) die

[4] R. Netz, W. Noel: Der Kodex des Archimedes (C. H. Beck)

Zeit in Sekunden und auf der Ordinate (y-Achse) die Durchflussrate in Liter pro Sekunde ein.

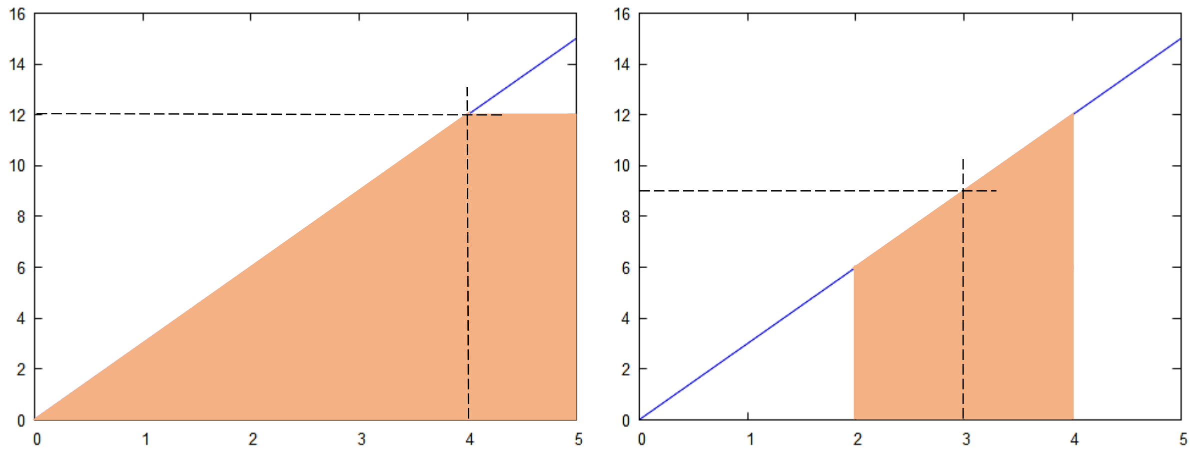


Abb. 7: Bestimmung der Durchflussmenge (V = Durchflussrate mal Zeit)

Wie gelangen wir nun von der Durchflussrate auf die durchgeflossene Wassermenge?

Ausgehend von $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ schreiben wir:

$$dV = \dot{V} \cdot dt \qquad \int dV = \int \dot{V} \cdot dt \qquad V = \dot{V} \cdot t$$

Durch Integration beider Seiten erhalten wir die gesuchte Lösung. Es ist also ganz einfach.

Damit lässt sich der Durchfluss zwischen 0 bis 5 Sekunden, d.h. während der Ventilöffnung und darüber hinaus, berechnen. Die Durchflussmenge entspricht nämlich exakt der Fläche unter dem Funktionsgraphen. Diese Fläche kann nun in ein Dreieck und in ein Rechteck aufgeteilt werden. Die Summe der Teilflächen ergibt dann die Durchflussmenge.

$$V = Fläche_{\triangle} + Fläche_{\square} \qquad Fläche_{\triangle} = \frac{Grundlinie \cdot Höhe}{2}$$

$$Fläche_{\square} = Grundlinie \cdot Höhe$$

$$V = \frac{g \cdot h}{2} + g \cdot h = \frac{4\ \mathrm{s} \cdot 12\ \mathrm{l}}{2 \cdot \mathrm{s}} + \frac{1\ \mathrm{s} \cdot 12\ \mathrm{l}}{\mathrm{s}} = 24\ \mathrm{l} + 12\ \mathrm{l} = 36\ \mathrm{l}$$

Nicht wesentlich schwieriger ist es, wenn wir den Durchfluss zwischen bspw. 2 und 4 Sekunden bestimmen möchten. Letztlich geht es immer nur um die vom Funktionsgraphen und der Abszisse aufgespannte Fläche. In diesem Fall handelt es sich um ein Trapez.

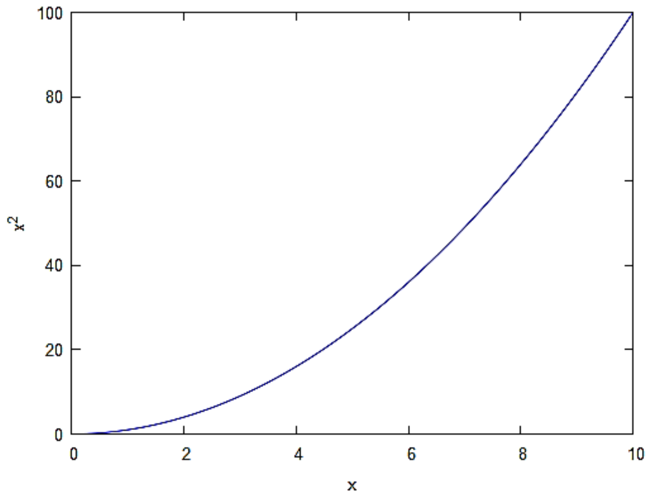
$$V = A_{\mathrm{Trapez}} = h \cdot m = \frac{2\ \mathrm{s} \cdot 9\ \mathrm{l}}{\mathrm{s}} = 18\ \mathrm{l}$$

h Höhe
m Mittellinie

2.3.2 Nichtlineare Durchflussrate

Erheblich schwieriger wird die Bestimmung der Durchflussmenge, wenn die Durchflussrate nicht linear anwächst. Eine simple Methode bestünde im Wiegen des Wassers. Über das Gewicht lässt sich dann das Volumen errechnenen. Das Ganze ist aber etwas umständlich. Eleganter wäre doch, wenn uns ein Verfahren zur Verfügung stünde, mit dem sich das Volumen des durchfliessenden Wassers rein rechnerisch, d.h. auf analytischem Wege, bestimmen liesse. Gerade dies leistet nun die Integralrechnung für uns.

Wenn die zugrundeliegende Funktion bekannt ist, kann die Durchflussmenge während einer definierten Zeitspanne errechnet werden.



Gegeben sei eine quadratische Funktion: $f(x) = x^2$

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem tragen wir auf der Abszisse die Zeit in Sekunden und auf der Ordinate die Durchflussrate in Liter pro Sekunde ein.

Abb. 8: Durchflussmenge bei einer nicht konstanten Durchflußrate

Wie gross ist die Durchflussmenge, die zwischen 0 bis 10 Sekunden das Ventil durchströmt?

Ohne hier eine nähere Erklärung für den Lösungsweg zu liefern, gilt:

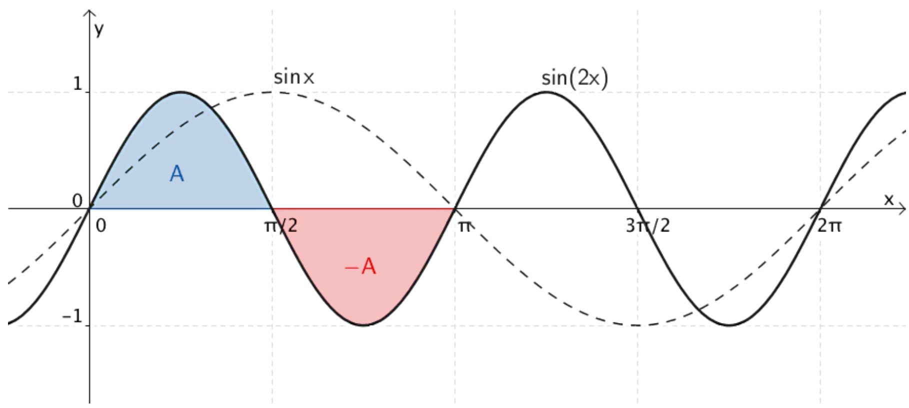
$$V = \int_0^t f(x)dx = \int_0^{10} x^2 dx$$

$$V = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{10} \quad \text{daraus folgt:} \quad V = \frac{1}{3} \cdot 1'000 - 0 = 333\frac{1}{3}$$

Zwischen 0 bis 10 Sekunden strömen somit 333 $^1/_3$ Liter Wasser aus dem Behälter.

2.3.3 Besonderheiten

Es gibt Integrale, die gleich Null sind. So sind sämtliche Integrale für Sinus- und Kosinusfunktionen im Intervall einer Periode immer Null.



$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\, dx = 0$$

Abb. 9: Flächenbilanz der Sinusfunktion f(x) = sin(2x)

Flächen über der x-Achse werden positiv, solche unter der x-Achse negativ bewertet (Abb. 9). Gleich grosse Flächen über und unter der Abszisse kompensieren sich folglich. Befände sich die obere Integrationsgrenze bspw. bei 3π/2, so ergäbe das Integral den Zahlenwert für die Fläche einer positiven Halbwelle.

$$\int_0^{3\pi/2} \sin(2x)\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos\,(2x)\right]_0^{3\pi/2} = 1$$

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir die untere Integrationsgrenze nach π verschieben.

Besonders deutlich ist dieses Phänomen bei der Fourieranalyse ersichtlich, wo solche "Null-Integrale" beim Auffinden der Koeffizienten bekanntlich vorkommen.

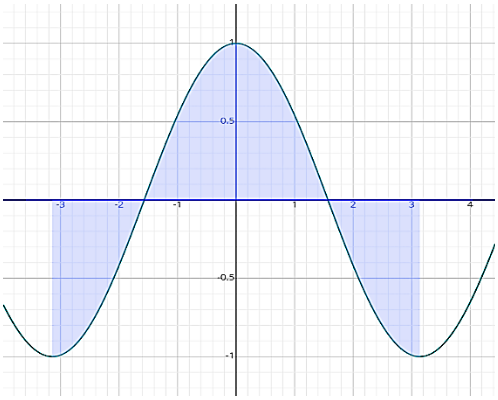
Beispiel: Gegeben sei eine Funktion und ihre Fourierreihe über eine Periode von –π bis +π; daraus soll nun der Gleichanteil a_0 bestimmt werden. Aufgezeigt werden soll, dass Sinus- und Kosinus-Integrale über eine Periode verschwinden.

Ohne nähere Erklärung zu den Einzelheiten gilt folgender Lösungsweg.

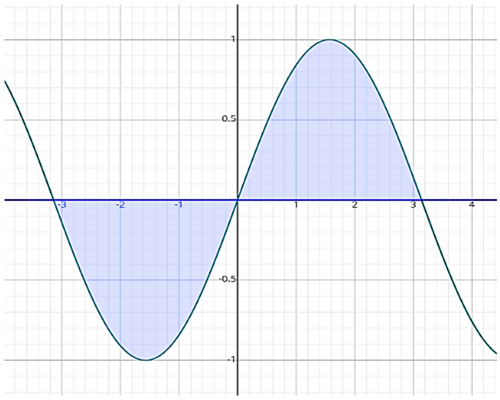
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx$$

Beide Summen verschwinden (!) wegen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = 0$$



a) Kosinusfunktion im Intervall –π bis +π;



b) Sinusfunktion im Intervall –π bis +π;

Abb. 10: Die Fächen (Integrale) summieren sich zu Null

Demzufolge bekommen wir als Ergebnis für den Gleichanteil:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

3 Der Hauptsatz der Analysis

Der fundamentale Satz der Analysis, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist, besagt mit Worten, dass sich Integration und Differentiation *invers* zueinander verhalten.

Differentialrechnung	**Intergralrechnung**
Bestimmung der Änderungsrate einer Funktion	Auffinden einer passenden Stammfunktion
↓	↑
$F'(t) = g(t)$	$F(t) = \int g(t)dt + C$

Beim Integrieren geht es letztlich darum, eine *Stammfunktion* F(t) zu einer gegebenen Funktion g(t) zu finden. Leitet man F(t) nach der unabhängigen Variablen ab, so erhält man wieder die Ausgangsfunktion. Die Integrationskonstante "C" kann prinzipiell jeden konstanten Wert annehmen, sie kann aber auch Null sein.

Im behandelten Kinematik-Beispiel bedeutet dies, daß man nicht nur Geschwindigkeit und Beschleunigung aus dem Weg s(t) ableiten, sondern auch den umgekehrten Weg gehen kann. Man kann mit einem Beschleunigungsmeßgerät die Beschleunigung a(t) messen und mittels Integration die Geschwindigkeit v(t) und daraus – nach weiterer Integration – den zurückgelegten Weg s(t) berechnen.

$$v(t) = \int a(t)dt \quad \rightarrow \quad v(t) = at + C_1$$

$$s = \int v(t)dt \quad \rightarrow \quad s(t) = (at + v_0)dt + C_2 \quad \rightarrow \quad s(t) = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 t + s_0$$

Die beiden Integrationskonstanten stehen hier für die Anfangsgeschwindigkeit und einen bereits vor dem Start zurückgelegten Weg; für $v_0 = 0$ wird C_1 obsolet, für $s_0 = 0$ wird C_2 obsolet. Ansonsten werden die Werte zum jeweiligen Ergebnis addiert.

4 Lernquellen

4.1 Fachliteratur

Silvanus P. Thompson: Analysis leicht gemacht (Verlag Harri Deutsch)

Peter Dörsam: Oberstufenmathematik leicht gemacht (2 Bde., PD-Verlag)

Hans-Jochen Bartsch: Taschenbuch mathematischer Formeln (Fachbuchverlag Leipzig)

4.2 Weblinks

http://www.mathematik.net/
https://www.mathe-online.at/
http://maxima.sourceforge.net/de/